# Trendovi u matematici

## – kako bi mogli promijeniti obrazovanje?

*Prof. dr. sc. László Lovász, Eötvös Loránd Sveučilište, Budimpešta, Mađarska*

Matematičko se djelovanje u posljednjih 50 godina prilično promijenilo. Neke od tih promjena, poput uporabe računala, vrlo su jasne i uvelike se primjenjuju u nastavi matematike. No, postoje i drugi, suptilniji trendovi koji možda nisu toliko očigledni. U ovom članku raspravit ćemo o nekima od tih trendova te o načinu na koji bi oni mogli i trebali utjecati na budućnost matematičkog obrazovanja.

## 1. Uvod

Matematičko se djelovanje (istraživanja, primjene, obrazovanje, znanstvena izlaganja) u posljednjih 50 godina prilično promijenilo. Neke od tih promjena, poput uporabe računala, vrlo su jasne i već se primjenjuju u nastavi matematike. No, postoje i drugi, suptilniji trendovi koji možda nisu toliko očigledni. Hoće li oni utjecati na poučavanje matematike? Odgovori će se, naravno, razlikovati na osnovnoškolskoj, srednjoškolskoj, dodiplomskoj i diplomskoj razini. Ovo su neki od glavnih trendova u matematici, koje treba uzeti u obzir:

**1. Broj matematičara i matematičkih istraživanja** eksponencijalno rastu; udvostručuju se otprilike svakih 25 godina. Ta činjenica za sobom povlači niz posljedica:

— nemogućnost stalnog praćenja novih rezultata;

— potrebu za učinkovitijom međusobnom suradnjom znanstvenika;

— teškoće pri definiranju srži matematike (onoga što bi se trebalo svladati na pojedinim razinama obrazovanja);

— potrebu za boljim širenjem novih ideja.

Kako matematičko obrazovanje može pripremiti buduće znanstvenike i one koji koriste matematiku, buduće donosioce odluka i obrazovanu javnost za te promjene?

**2. Nova područja primjene i njihov rastući značaj.** Informacijska tehnologija, znanost, ekonomija i gotovo sva područja ljudskog djelovanja sve više koriste matematiku i, što je možda još važnije, koriste ne samo tradicionalnu primijenjenu matematiku nego sve grane matematike. Kako ćemo naučiti svoje učenike da prepoznaju probleme koji se mogu rješavati uz pomoć matematike?

**3. Novi alati: računala i informacijska tehnologija.** Ovo je možda najuočljivija novina pa je, shodno tome, već puno učinjeno na uvođenju računala u nastavu. No, utjecaj računala na svakodnevni život i znanstveni rad brzo se mijenja: pored dizajna algoritama, eksperimentiranja i novih mogućnosti ilustriranja i vizualizacije, koristimo e-poštu, diskusijske grupe, *on-line* enciklopedije i druge internetske mogućnosti. Može li sustav obrazovanja iskoristiti te mogućnosti, ići ukorak s promjenama, te možemo li naučiti učenike da ih iskoriste na što produktivniji način?

**4. Novi oblici matematičkog djelovanja.** Kao djelomičan odgovor na gore navedena pitanja, sve više na značaju dobivaju neki novi oblici matematičkog djelovanja: algoritmi i programiranje, modeliranje, predviđanje (očekivanje), informativno pisanje i predavanje. Koji od ovih netradicionalnih oblika matematičkog djelovanja možemo i trebamo poučavati? Reći ću nešto više o svakom od tih trendova i raspraviti o njihovom utjecaju na matematičko obrazovanje. Iskoristit ću neka zapažanja iz svojih prijašnjih radova [6, 7].

**László Lovász** (1948. – ) ugledni je mađarski matematičar. Uže područje njegovog znanstvenog interesa jest kombinatorika. Dr. Lovász je ravnatelj Matematičkog instituta Eötvös Loránd Sveučilišta u Budimpešti. Od 1. siječnja 2007. predsjednik je Izvršnog komiteta međunarodne udruge matematičara.

Dr. Lovász je dobitnik niza svjetskih nagrada za znanost: Nagrade George Polya (1979.), nagrade Ray D. Fulkerson (1982.), Goedelove nagrade (2001.), Wolfove i Knuthove nagrade (1999.), Kyoto nagrade (2010.) itd. Kao srednjoškolac sudjelovao je na tri međunarodne matematičke olimpijade (1964., 1965. i 1966.) i na svakoj je osvojio zlatnu medalju.

## 2. Veličina zajednice i matematički znanstveni rad

Broj matematičkih publikacija (kao i broj izdanja u ostalim područjima znanosti) u posljednjih 50 godina eksponencijalno je rastao. Matematika je prerasla malu, čvrsto povezanu i zatvorenu zajednicu čudaka, kakva je nekad bila. Svojim rastom ta struka postaje sve raznovrsnija, sve izgrađenija i složenija.

Matematičari se ponekad ponašaju da su matematička istraživanja i znanstveni rad ono što su bili nekad: da ćemo sve potrebne podatke pronaći u novim časopisima u knjižnici, a da će naš članak, objavimo li ga u priznatom časopisu, doprijeti do svih onih koji naše rezultate mogu iskoristiti u svojim istraživanjima. Međutim, čak 3/4 takvih časopisa ne nalazi se na stolovima knjižnica, a čak i kad bi osoba imala pristup svima njima i kad bi ih imala vremena sve pročitati, bila bi upoznata tek s rezultatima malog dijela matematike.

Veća struktura nikad nije samo uvećana verzija manje. U većem i prilično složenom "organizmu" sve je veći dio tijela posvećen nadgradnji: prijenosu materijala i usklađivanju rada pojedinih dijelova.

U većim i složenijim društvima veliki i sve veći dio sredstava troši se na neproduktivne djelatnosti kao što su prijevoz, obrada podataka, obrazovanje ili rekreacija. Moramo shvatiti i pomiriti se s činjenicom da će sve veći dio matematičkog djelovanja biti posvećen komunikaciji.

To se lako opaža: ubrzano raste broj susreta, konferencija, radionica, znanstvenih instituta, sve više se koristi e-pošta. Povećao se broj članaka s više autora. No, vjerojatno ćemo uskoro doseći točku u kojoj uzajamni, osobni kontakt više neće osiguravati dovoljan protok informacija.

Još je jedna posljedica povećanja brojnosti: neizbježan je nastanak manjih društava, mogli bismo reći podzajednica. Jedan od odgovora na taj problem je stvaranje nove djelatnosti koja bi se bavila sekundarnom obradom rezultata znanstvenih istraživanja. U nedostatku bolje riječi, nazivam to informativnim izvještavanjem, iako pod tim mislim na oblik matematičkog istraživanja, a ne samo na pisanje: otkrivanje grananja rezultata i njihovu povezanost s rezultatima iz drugih područja, razjašnjavanje, možda prevođenje za one koji dolaze iz različitih podzajednica.

Postoje li odgovarajuće promjene u matematičkom kurikulu i, općenito, u načinu poučavanja matematike? Prvi i najhitniji problem je sama količina gradiva koju bi bilo dobro (tj. nužno) poučavati. Osim toga, trebali bismo pojačati (što ujedno znači i više poučavati) netradicionalne oblike matematičkog djelovanja, kao što su dizajn algoritama, modeliranje, eksperimentiranje i znanstveno izlaganje. Ipak, moram naglasiti da rješavanje problema i dalje treba ostati glavna karakteristika poučavanja matematike.

Kako pronaći vremena za učenje pojmova, teorema i dokaza kad se gradivo ubrzano povećava, a broj sati nastave matematike u mnogim zemljama smanjuje? Koja od novih područja treba uvesti (u srednjoj školi ili na dodiplomskom studiju), a što od starog gradiva treba izbaciti? To nije samo trenutna kriza: matematička istraživanja i znanstveni rad ne pokazuju nikakve znakove usporavanja.

Jedan od mogućih odgovora na to pitanje je ostaviti poučavanje novijih područja matematike za posljednju razinu obrazovanja, za magistarske i doktorske programe. Ali tada mnogi obrazovani ljudi nikad neće upoznati noviju matematiku, ne stariju od 200 godina, što će pridonijeti nesretnoj ali čvrstoj zabludi da je matematika zatvoren predmet. Mnoga nova područja matematike važna su za razumijevanje razvoja tehnologije i znanosti. Ako ta područja ne poučavamo, odustajemo od ukazivanja na rastuću ulogu matematike u modernom životu.

Druga mogućnost je ukloniti iz kurikula tradicionalno gradivo koje se smatra manje važnim. Loša strana tog pristupa je narušavanje dobro postavljenih metoda za razvijanje matematičkog mišljenja. Primjerice, elementarna geometrija izbačena je iz kurikula u mnogim zemljama. U modernim matematičkim istraživanjima taj dio geometrije zaista je periferan, no on i dalje ostaje važan u primjenama i još važniji jer je nužan za razvoj prostornog zora, a najznačajniju ulogu ima u razumijevanju stvarne prirode matematičkih dokaza, u onom aha-efektu kada neshvatljiva veza postaje jasna gledanjem na pravi način.

Nema jednostavnog odgovora na to pitanje. Vjerojatno se treba usredotočiti na matematičke kompetencije poput rješavanja problema, apstrakcije, generalizacije i specijalizacije, logičkog zaključivanja i uporabe matematičkog formalizma kao i na netradicionalne vještine spomenute ranije (vidi, primjerice, [10]). Treba odabrati mješavinu klasičnih i modernijih matematičkih tema koje su najpogodnije za razvoj tih kompetencija i (naravno) osnovnih vještina, te koje istovremeno pružaju određenu sliku i povijesnih korijena i suvremene primjene.

Sve veći i kompleksniji matematički svijet doveo je do još jednog problema: ubraja li se u matematičko obrazovanje i učenje o izvođenju znanstvenog izlaganja? Jedan njegov oblik je poučavanje kako objasniti matematiku laicima, kako sažeti rezultate a da se ne gubi u detaljima. To nije lako, ali stvarno je korisno naučiti učenike takvim vještinama.

Najradikalnija ideja bila bi poučavanje informativnog izlaganja. U većini znanstvenih predmeta, poput kemije ili astronomije, normalno je da se u višim razredima osnovne ili srednjih škola poučavaju neke činjenice bez tumačenja tehničkih detalja koji su doveli do njihova otkrića (ili čak njihova pravog značenja). Slično se ponekad radi i u matematici: učenici uče da se pravilni peterokut može konstruirati uporabom ravnala i šestara a pravilni sedmerokut ne može, ili da se jednadžbe petog stupnja općenito ne mogu riješiti u radikalima. Ali ti su primjeri stari skoro 200 godina! Možemo li osmišljavanjem nekih neegzaktnih ali ipak matematičkih sadržaja učenicima prikazati modernu matematiku? Oklijevam odgovoriti potvrdno, ali pitanje stoji.

## 3. Nova područja i sve veći značaj primjene

Fizika i inženjerstvo tradicionalna su područja primjene matematike. U tim se primjenama koristi matematička analiza, i to prvenstveno diferencijalne jednadžbe. No zbog procvata znanstvenih istraživanja u posljednjih 50 godina, mnoga druga područja znanosti dosegla su točku u kojoj trebaju ozbiljan matematički alat, a često im tradicionalni alat matematičke analize ne odgovara.

Primjerice, biologija proučava genetski kod koji je diskretan: jednostavni i osnovni problemi kao što su pronalaženje odgovarajućih uzoraka ili ispitivanje posljedica preokretanja pojedinih dijelova koda zvuče više kao problemi koje bi mogao riješiti stručnjak za kombinatoriku, a ne za diferencijalne jednadžbe. Pitanje o informacijama koje kod sadrži, što je višak u kodu, ili problem stabilnosti koda, klasičnom matematičaru mogu zvučati nejasno, no računalni teoretičar odmah će naći neke alate da to formalizira (pa čak i kad se pronalaženje rješenja tog trena čini preteškim).

Čak se i u fizici može naići na neobične diskretne matematičke strukture, elementarne čestice, kvarkove i slično, koje su vrlo kombinatorne, a razumijevanje osnovnih modela u statističkoj mehanici traži poznavanje teorije grafova i vjerojatnosti.

Ekonomija je veliki korisnik matematike, a veći dio potrebe za matematikom ne odnosi se na tradicionalne alate primijenjene matematike. Uspješnost linearnog programiranja u ekonomiji i operacijskim istraživanjima ovisi o uvjetima na konveksnost i neograničenu djeljivost; vodeći računa o nedjeljivim jedinicama (primjerice, logičkim odlukama ili pojedincima) dolazimo do cjelobrojnog programiranja i drugih modela kombinatorne optimizacije koji su puno teži.

I na kraju, postoji i potpuno novo područje primijenjene matematike: računalstvo. Razvoj elektroničkog računanja stvorio je ogromno područje dobro formuliranih, teških i važnih matematičkih problema, proizašlih iz proučavanja algoritama, baza podataka, formalnih jezika, kriptogafije i računalne sigurnosti, VLSI-krugova i ostalog. Većina toga ima veze s diskretnom matematikom, formalnom logikom i vjerojatnošću.

Treba dodati da je teško predvidjeti koja od grana matematike će se primjenjivati u bližoj budućnosti. Prije samo 30 godina činilo se da problemi iz teorije brojeva spadaju u teorijsku, najklasičniju i sasvim neprimjenjivu matematiku, ali danas mnogi dijelovi teorije brojeva čine jezgru matematičke kriptografije i računalne sigurnosti.

Posljednjih je desetljeća vrlo pozitivna promjena smanjenje razdvojenosti između teorijske (čiste) i primijenjene matematike. Čini mi se da raste uzajamno poštovanje tih dviju grana matematike, skupa s brojem ljudi koji pridonose podjednako objema stranama. Raznovrsnost primjene trebala bi povećati i protok informacija kroz cijelu matematiku. Niti jedno područje matematike više se ne može povući u svoju utvrdu i zatvoriti vrata primjenama ili pak tvrditi da spada u isključivo primijenjenu matematiku.

Kako učenicima barem letimično prikazati snagu tih novih primjena? Možda bi se tu mogli iskoristiti novi oblici matematičkog rada poput programiranja i modeliranja (o čemu ćemo raspraviti kasnije).

## 4. Novi alati: računala i informacijska tehnologija

Računala, naravno, nisu samo izvor zanimljivih i modernih matematičkih problema. Oni su alat za izvođenje i organizaciju naših znanstvenih istraživanja. Koristimo ih za e-poštu i obradu teksta, za eksperimentiranje i za prikupljanje podataka s weba, iz baza podataka *MathSciNeta*, *Wikipedije*, *Arxivesa*, elektroničkih časopisa i s osobnih stranica brojnih kolega matematičara.

Jesu li svi ti načini uporabe računala samo igranje ili u najboljem slučaju stvar komocije? Mislim da nisu i da će svaki od njih ostaviti duboki trag na našu znanost.

To se najlakše vidi u eksperimentiranju s programima *Maple*, *Mathematica*, *Mathlab* ili nekim drugim softverom. Oni otvaraju čitav niz mogućnosti za opažanja i eksperimente koje nije bilo moguće izvesti prije doba računala, te pružaju nove informacije i otkrivaju nove pojave.

Elektronički časopisi i baze podataka, web-stranice pojedinaca, društava i ustanova, *Wikipedia* i e-pošta omogućuju nove načine širenja rezultata i ideja. U određenom smislu oni povećavaju opseg znanstvenog istraživanja: ne samo da raste broj onih koji se bave istraživanjem, nego je i sve veća količina informacija koje su nam lako dostupne (koje su uz to sve glasnije i agresivnije – za informiranje e-poštom znamo da je daleko od nenametljivog). No sve to nam ipak na neki način pomaže u borbi s eksplozijom informacija.

Elektroničko objavljivanje postupno mijenja način pisanja znanstvenih radova. Obrada teksta na računalu na prvi pogled izgleda samo kao prikladniji način pisanja, ali polako sve više do izražaja dolaze mogućnosti elektroničkih verzija koje tiskani radovi nemaju: hiperlinkovi, slike i crteži u boji, animacije i slično.

Računalstvo je područje u kojem često mi učimo od svojih učenika, a ne obrnuto. Pitanje ovdje glasi: kako iskoristiti interes i informatičko znanje koje danas posjeduje većina učenika u korist matematičkog obrazovanja? Najbolji način su novi oblici matematičkog djelovanja o kojima se više raspravlja u sljedećem poglavlju.

## 5. Novi oblici matematičkog djelovanja

### 5.1. Algoritmi i programiranje

Tradicionalna, 2500 godina stara paradigma jest da se matematička istraživanja sastoje od definiranja pojmova, iskazivanja teorema i njihovog dokazivanja. Manje prepoznatljiv, ali gotovo isto toliko star je dizajn algoritama (sjetite se Euklidova algoritma ili Newtonove metode). Premda različita, ova dva načina bavljenja matematikom čvrsto su povezana (vidi [6]). Također je očigledno da su računala bitno pridonijela prepoznatljivosti i ugledu dizajna algoritama.

Algoritamska matematika (gledana kroz potrebe računala, ali prisutna i važna i daleko prije njihova razvoja!) nije u suprotnosti s klasičnom matematikom tipa "teorem-dokaz" (koju nazivamo još i *teorijskom* matematikom). Ona ustvari obogaćuje nekoliko klasičnih grana matematike novim pogledima, novim vrstama problema i novim načinima pristupa njihovu rješavanju. Dakle, nije algoritamska *ili* teorijska matematika, nego algoritamska *i* teorijska matematika.

Što to znači za nastavu matematike? Kao što je već rečeno, nastava mora pratiti, barem do određenog stupnja, što se događa u matematičkim istraživanjima, posebice u onim (rijetkim) slučajevima kad rezultati istraživanja iz temelja mijenjaju čitav okvir predmeta. Tako je primjerice teorija skupova morala ući u matematičko obrazovanje (a željelo se to učiniti bez nesuglasica i puno mirnije nego s "novom matematikom"). Algoritamska matematika još je jedan od tih slučajeva.

Međutim, dubina prodora algoritamskog pristupa u klasičnu matematiku još nije sasvim jasna i razlikuje se od područja do područja (kao i od predavača do predavača). Teorija grafova i optimizacija iz temelja su preuređene s obzirom na računsku složenost; teorija brojeva i algebra također se proučavaju iz te perspektive, no ostaju neriješena mnoga osnovna pitanja. U analizi i diferencijalnim jednadžbama takav pristup može i ne mora biti uspješan, a čini se da ni teorija skupova s algoritmima nema nikakve veze.

Naše iskustvo s "novom matematikom" upozorava da drastične promjene mogu biti pogubne čak i kad su novi okviri znanstvene i srednjoškolske matematike dobro postavljeni. Određeni algoritmi i njihova analiza mogli bi se poučavati otprilike u isto vrijeme kad se prvi put pojave teoremi i njihovi dokazi, možda u dobi od 14 godina. Naravno, neki algoritmi (primjerice za množenje i dijeljenje, itd.) pojavljuju se u kurikulu vrlo rano. No to su više recepti nego algoritmi, ne rade se dokazi njihove točnosti (prirodno) i ne analizira se njihova učinkovitost.

Učenje *"algoritmike"* počinje učenjem *dizajna*, a ne *izvođenja* algoritama [8]. Primjerice, Euklidov algoritam učenici mogu sami "otkriti". S vremenom će se pojaviti čitav niz problema dizajniranja algoritama (kao što danas postoji čitav niz zadataka i vježbi iz algebarskih jednakosti, geometrijskih konstrukcija ili elementarnih geometrijskih dokaza). Uz konkretne algoritme, učenici moraju upoznati i osnove teorije algoritama: ulaz, izlaz, točnost i dokaz točnosti, analizu vremena izvršavanja i potrebnog prostora, itd.

Na dodiplomskom studiju pomak prema algoritamskom tumačenju gradiva bit će (i jest) lakši i brži. Već sada se neki predmeti, poput teorije grafova, na mnogim mjestima poučavaju potpuno algoritamski: najkraće razgranato stablo, maksimalni protok i odgovarajući algoritmi standardne su teme skoro svih predmeta iz teorije grafova. To je sasvim prirodno jer, kao što sam spomenuo, teorija računalne složenosti pruža jedinstveni okvir za većinu osnovnih grafo-teorijskih rezultata. U ostalim područjima trenutno nije baš tako, ali u nekim se temama lijepo može primijeniti veliki dio klasične teorije brojeva (primjerice kod ispitivanja je li neki broj prost ili u kriptografskim protokolima).

Treba razlikovati algoritme od računalnih programa kao njihove primjene. Sam algoritam je matematički objekt, a program ovisi o stroju i/ili o programskom jeziku. Naravno, učenici trebaju vidjeti da algoritam vodi do programa koji se izvršava na računalu, ali neće se nužno izvršavati svaki algoritam o kojem uče ili koji dizajniraju. Situacija je slična kao u geometrijskim konstrukcijama ravnalom i šestarom: neke konstrukcije treba konkretno izvesti na papiru, ali za većinu je dovoljno znati matematičko rješenje (cilj je znati ih primijeniti na razne geometrijske pojmove i rezultate, a ne naučiti ih crtati).

Dopustite mi da upozorim i na nedostatke algoritamskog jezika. Ne postoji opće prihvaćen oblik prikazivanja algoritma, čak niti u stručnoj literaturi (a koliko vidim, udžbenici iz računalstva u srednjim školama još su neusklađeniji i rješavaju taj problem na još neobičnije načine). U praksi to varira od sasvim neformalnog opisa algoritama do programa u konkretnim programskim jezicima. Postoje dobri razlozi u korist obaju rješenja. Ja sam skloniji neformalnom opisivanju jer mislim da detaljna primjena (izvršavanje programa) često sakrije matematičku bit. Primjerice, algoritam može sadržavati korak "odaberi neki element iz skupa $S$". Prilikom izvršavanja moramo točno odrediti koji element izabrati, pa ovaj korak mora prijeći u nešto poput ovog: "odaberi prvi element iz skupa $S$". No, možda postoji neki drugi algoritam u kojem je važno da se odabere upravo prvi element. Dakle, pretvaranjem algoritma u program izgubio se taj važan detalj. A može se dogoditi da je bolje odabrati zadnji element iz $S$. Neformalni opis tu mogućnost ostavlja otvorenom, dok pretvaranje algoritma u program to ne dozvoljava.

S druge strane, glavni problem neformalnog oblika prikazivanja algoritma je nemogućnost utvrđivanja vremena izvršavanja ili broja koraka, jer to ovisi baš o detaljima izvršavanja, čak i onima ispod razine programskog jezika: o prikazu podataka i upotrijebljenoj strukturi podataka.

Dugačak je put od matematičke ideje algoritma do računalnog programa. Potreban je pažljiv dizajn algoritma: analiza, optimizacija vremena izvršavanja i potrošnje prostora, odabir strukture podataka (ponekad matematički vrlo zahtjevan) i programiranje. Na studiju je taj put vrlo poučan, ali čak i u srednjim školama bi se matematika i izvršavanje algoritma trebali jasno razlikovati.

Važan zadatak nastavnika matematike u skorijoj budućnosti (i onih na fakultetima i onih u srednjim školama) jest da razviju jedinstveni način opisivanja i analize algoritama. Način koji će pokazivati matematičke ideje u dizajnu, koji će olakšati analizu, koji će biti sažet i elegantan – što bi uvelike pridonijelo rušenju otpora prema algoritmima koji se osjeća na objema stranama, i kod nastavnika i kod učenika.

## 5.2. Problemi i hipoteze

U malim zajednicama svi znaju koji su glavni problemi. Međutim, u društvu od 100 000 ljudi, probleme treba prepoznati i precizno ih formulirati. Loše postavljeni problemi vode do dosadnih i nevažnih rješenja. Zbog toga se predviđanje problema uzdiže do razine rezultata znanstvenog istraživanja. U rukama pokojnog Paula Erdösa, koji je formulirao više hipoteza nego prije njega svi matematičari zajedno, predviđanje je postalo prava umjetnost. On je svoje hipoteze smatrao jednako važnim dijelom svog matematičkog opusa, kao i svoje teoreme.

Naravno, nije lako definirati što čini dobru hipotezu. (I oko Erdösovih hipoteza postoji čitav niz nesuglasica.) Ako je hipoteza dobra, očekuje se da će njezino razjašnjavanje značajno unaprijediti naše znanje. Mnogi matematičari misle da se važnost predviđanja problema i njihovog mogućeg rješenja u matematici može jasno vidjeti, međutim, neke hipoteze su toliko iznenađujuće i potpuno nerješive trenutno postojećim metodama da njihovo rješenje *mora* dovesti do nečeg novog – samo još ne znamo do čega.

U načinu poučavanja matematike u kojem je naglasak na otkrivanju (osobno ga smatram najboljim), dobar je nastavnik uvijek izazivao učenike da naslute pretpostavke koje će ih dovesti do teorema ili do nekog koraka dokaza. To dugo traje i postoji opasnost da i taj oblik poučavanja nestane pod pritiskom vremena. Mislim da on ipak mora ostati sačuvan i da mora jačati.

## 5.3. Matematički eksperimenti

Računala nam u određenoj mjeri dozvoljavaju da matematiku pretvorimo u eksperimentalni predmet. Teoretski, matematika je deduktivna znanost, no u sljedećim situacijama eksperimentiranje je nužno:

a) Ispitivanje efikasnosti algoritama – potrebe za resursima (vrijeme i prostor) previše ovise o ulaznim faktorima da bi se mogle dobro predvidjeti[1].

b) Kriptografska i druge vrste sigurnosti računala često ovise o klasičnim pitanjima distribucije prostih brojeva i sličnim problemima iz teorije brojeva, kao što je primjerice Riemannova hipoteza i njezina proširenja. Nepotrebno je reći da se u takvim, praktički presudnim pitanjima, moraju izvoditi eksperimenti iako bi deduktivni odgovori bili idealni.

c) Eksperimentalna matematika je dobar izvor hipoteza; klasičan primjer toga je Gaussovo otkriće (ne dokaz) teorema o prostim brojevima. Od modernijih primjera, spomenuo bih najsistematičniji: generator hipoteza u teoriji grafova, program *Graffiti* autora Fajtlowicza [2, 3].

O eksperimentalnoj matematici postoji nekoliko izvrsnih knjiga (vidi na primjer [1]). Programi, kao što su *Derive*, *Maple*, *Mathematica*, pružaju i nama i učenicima čitav niz mogućnosti eksperimentiranja

[1] Ovdje ne ubrajam utvrđivanje ispravnosti programa, što nije matematičko pitanje, nego više problem inženjera programske podrške.

u matematici. Jednostavan primjer: učenik može razviti pravi osjećaj za pojam i brzinu konvergencije računanjem i uspoređivanjem parcijalnih suma konvergentnih redova $\sum \frac{1}{k^2}$ i $\sum \frac{1}{2^k}$.

Matematički eksperimenti zaista se često koriste kod poučavanja analize, teorije brojeva, geometrije i drugih tema. Uspjeh je diskutabilan. Moj dojam je da za razvoj većeg broja dobro ispitanih eksprimentalnih zadataka treba vremena, slično kao i za algoritme, a to je najvažniji element uspjeha tih metoda poučavanja.

## 5.4. Modeliranje

Prvi i najvažniji korak u gotovo svakoj uspješnoj primjeni matematike jest stvaranje dobrih modela. U obrazovanju je prepoznata važnost modeliranja [9], ali njegova zastupljenost u odnosu na ostalo gradivo i način poučavanja prilično su diskutabilni.

Izrada modela je tipičan interaktivni proces u kojem matematičar mora surađivati s inženjerima, biolozima, ekonomistima i mnogim drugim strukama koje trebaju pomoć matematike. Moglo bi se kombinirati poučavanje matematičkog modeliranja s poučavanjem timskog rada i stručne suradnje.

Dobar primjer je kolegij Diskretno matematičko modeliranje na Sveučilištu u Washingtonu [4] (slični kolegiji se drže i na drugim sveučilištima, primjerice na Sveučilištu Eötvos u Budimpešti). Glavna karakteristika tih predmeta je da studenti u grupama po dvoje ili troje moraju u svojem okruženju pronaći problem iz stvarnog života. Zatim moraju razviti model, prikupiti podatke, pronaći i napisati algoritme koji odgovaraju na postavljena pitanja i načiniti prezentaciju rezultata. Postavljeni životni problemi su vrlo širokog spektra, od problema određivanja najomiljenijih igara do pokušaja pomaganja članovima obitelji ili prijateljima u poslovanju, a neki od odgovora pokazali su se vrlo korisnima.

## 5.5. Izlaganje i populariziranje

U matematičkoj znanstvenoj zajednici uloga ovog oblika djelovanja brzo raste. Uz tradicionalan način pisanja dobre monografije (koja se još uvijek visoko cijeni) javlja se sve veća potreba za informativnim izlaganjima, kratkim pregledima, mini-tečajevima, priručnicima i enciklopedijama. Mnoge konferencije (često one najuspješnije) su velikim dijelom ili potpuno posvećene informativnim izlaganjima i pregledima; izdavači više vole objavljivati zbornike kratkih pregleda (sažetaka) nego znanstvenih radova. Sve više se pridaje važnost informativnom radu, premda ne u potpunosti.

S druge strane, nastava matematike ne čini ništa da učenike pripremi za to. Matematika je općepoznata kao težak predmet za razgovor s laicima (čak i znanstvenicima). Mislim da treba uložiti puno više truda kako bismo naučili učenike svih razina da naprave prezentaciju ili pišu o matematici koju su naučili. (Jedna od teškoća je što o kriterijima za dobar matematički izvještaj malo znamo.)

### LITERATURA

1/ J. M. Borwein, D. H. Bailey, R. Girgensohn: *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*, A. K. Peters, 2004.

2/ S. Fajtlowicz: On conjectures of Graffiti, *Discrete Math.* **72** (1988.), 113–118.

3/ S. Fajtlowicz: Postscript to Fully Automated Fragments of Graph Theory, `http://math.uh.edu/~siemion/postscript.pdf`

4/ *Discrete Mathematical Modeling*, undergraduate course at the University of Washington, `http://www.math.washington.edu/goebel/381/`

5/ P. R. Halmos, Applied mathematics is bad mathematics, in *Mathematics Tomorrow* (ed. L. A. Steen), Springer (1981.), 9–20.

6/ L. Lovász: Algorithmic mathematics: an old aspect with a new emphasis, in: *Proc. 6th ICME, Budapest, J. Bolyai Math. Soc.* (1988.), 67–78.

7/ L. Lovász: One mathematics, *The Berlin Intelligencer, Mitteilungen der Deutschen Math.-Verein*, Berlin (1998), 10–15.

8/ S. Maurer, Two meanings of algorithmic mathematics, *Mathematics Teacher* (1984.), 430–435.

9/ *Modelling and Applications in Mathematics Education* (eds: W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn and M. Niss), ICMI Study No. 14, Springer, 2007.

10/ M. Niss: Quantitative Literacy and Mathematical Competencies, `http://www.maa.org/Ql`