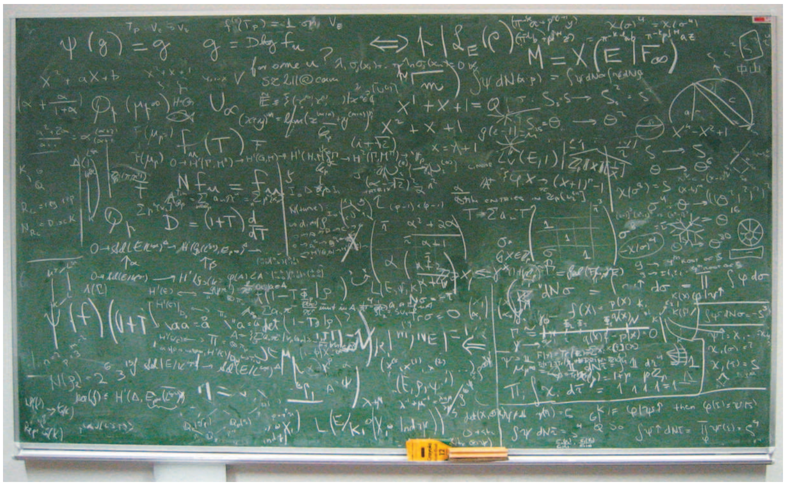
Više dokaza

jedne algebarske nejednakosti



Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Korisnije je riješiti jedan zadatak na nekoliko različitih načina nego riješiti desetke zadataka – na samo jedan način. Ako se jedan zadatak riješi na razne načine, može se uspoređivanjem rješenja utvrditi koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Na taj se način stječe i izgrađuje vještina rješavanja zadataka.

W.W. Sawyer, *Prelude to Mathematics*

Dokazivanje nejednakosti u matematici izuzetno je zanimljiv i važan posao. Tu dolazi do izražaja bogatstvo raznih ideja, naravno, ukoliko se dobro poznaje teorija koja se odnosi na nejednakosti. Pritom mislimo na nejednakosti između brojnih sredina, kao i nejednakosti Cauchy-Bunjakovski-Schwartza, Bernoulija, Jensena, Chebysheva, Hoeldera, Minkowskog, Shura, Huygensa, Muirheada i još neke.

U ovom ćemo se članku baviti dokazom algebarske nejednakosti koja glasi:

$$a^3+b^3+a+b\geq 4ab;\quad (a,b>0)\,. \tag{1}$$

Najprije ćemo dati jedan dokaz koristeći činjenicu da je $(x-y)^2\geq 0$ za sve $x,y\in\mathbf{R}$.

Dokaz 1. Imamo

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+a+b\geq 4ab\\
\iff\ &a^3+b^3+a+b-4ab\geq 0\\
\iff\ &a^3-2a^2+a+b^3-2b^2+b+2a^2\\
&\qquad -4ab+2b^2\geq 0\\
\iff\ &a\left(a^2-2a+1\right)+b\left(b^2-2b+1\right)\\
&\qquad +2\left(a^2-2ab+b^2\right)\geq 0\\
\iff\ &a\,(a-1)^2+b\,(b-1)^2\\
&\qquad +2\,(a-b)^2\geq 0\,.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je točna pa je točna i njoj ekvivalentna nejednakost (1).

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a = b = 1$.

Sada ćemo dati još pet dokaza nejednakosti (1) u kojima ćemo koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (A≥G) koja glasi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}; \quad (2)$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n > 0),$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. (Više dokaza ove nejednakosti se može naći u [1]).

Dokaz 2. Imamo

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab \\ \iff &a\left(a^2+1\right) + b\left(b^2+1\right) \geq 4ab. \end{aligned} \quad (4)$$

Na osnovu nejednakosti (2) za $n = 2$ imamo:

$$\frac{a^2+1}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot 1} \iff a^2 + 1 \geq 2a \quad (4)$$

i

$$\frac{b^2+1}{2} \geq \sqrt{b^2 \cdot 1} \iff b^2 + 1 \geq 2b. \quad (5)$$

Sada dobivamo iz (4) i (5):

$$\begin{aligned} a\left(a^2+1\right) + b\left(b^2+1\right) &\geq a \cdot 2a + b \cdot 2b \\ &= 2a^2 + 2b^2 \geq 4ab \\ \iff &\ 2\left(a^2 - 2ab + b^2\right) \geq 0 \\ \iff &\ 2(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

a ova nejednakost je točna, što znači da je i njoj ekvivalentna nejednakost (3) točna, tj. dana nejednakost (1) je točna.

Dokaz 3. Imamo

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab \\ \iff &a^2\left(a + \frac{1}{a}\right) + b^2\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq 4ab. \end{aligned} \quad (6)$$

Kako je iz nejednakosti A≥G za $n = 2$:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \text{i} \quad b + \frac{1}{b} \geq 2,$$

dobivamo da je nejednakost (6) ekvivalentna s nejednakošću:

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 \geq 4ab \\ \iff &2\left(a^2 - 2ab + b^2\right) \geq 0 \\ \iff &2(a-b)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

a ova nejednakost je točna pa je točna i dana nejednakost (1).

Dokaz 4. Na osnovu nejednakosti (2) između aritmetičke i geometrijske sredine za $n = 2$ imamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{ab}},$$

odnosno

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}},$$

te

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) \geq \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a}},$$

odnosno

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 2\sqrt{ab}$$

i

$$\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2.$$

Koristeći ove tri nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} &\geq 2\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ &= 2\left(\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \geq 4, \end{aligned}$$

a odavde množeći ovu nejednakost s $ab > 0$:

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab, \text{ q.e.d.}$$

Dokaz 5. Imamo

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + a + b \\ &\quad = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) + (a+b) \\ &\quad = (a+b)\left(a^2 + b^2 - ab + 1\right), \end{aligned}$$

a odavde zbog $(a-b)^2 \geq 0$, tj. $a^2+b^2 \geq 2ab$ ili $a^2+b^2-ab \geq ab$, slijedi:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+a+b &\geq (a+b)(ab+1) \\ &\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ab} \\ &\text{(zbog A}\geq\text{G za } n=2) \\ &= 4ab, \end{aligned}$$

tj.

$$a^3+b^3+a+b \geq 4ab.$$

Dokaz 6. Ovdje ćemo koristiti nejednakost (2), tj. A≥G za $n=4$. Slijedi

$$\frac{a^3+b^3+a+b}{4} \geq \sqrt[4]{a^3\cdot b^3\cdot a\cdot b}$$

$$\iff \frac{a^3+b^3+a+b}{4} \geq \sqrt[4]{a^4b^4}$$

$$\iff \frac{a^3+b^3+a+b}{4} \geq ab$$

$$\iff a^3+b^3+a+b \geq 4ab\,,$$

a ovo je dana nejednakost (1).

Složit ćemo se na kraju da nije bilo teško dokazati danu nejednakost (1) na jedan od načina koji su ovdje dani (možda i drukčije, što bi bilo veoma poželjno). No, cilj ovog članka je upravo da ukaže mladim matematičarima i svima onima koji pokazuju veći interes za matematiku kako je izuzetno važno dati više rješenja jednog te istog zadatka. Takvih primjera je jako puno kada je u pitanju dokazivanje nejednakosti o čemu je autor ovog članka pisao u svojim knjigama [1], [2], [3] i [4].

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

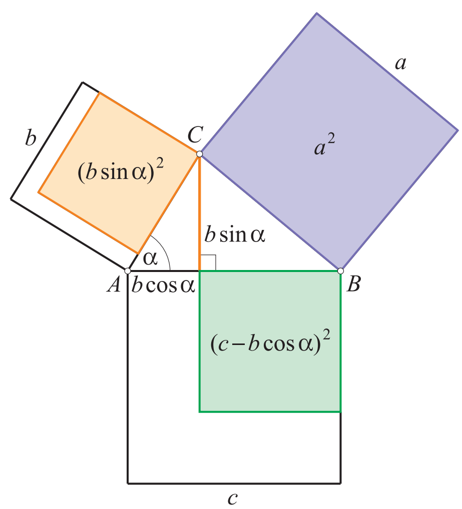
2/ Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

3/ Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

4/ Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

Dokaz bez riječi 1:

Poučak o kosinusu



$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin\alpha)^2+(c-b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \end{aligned}$$