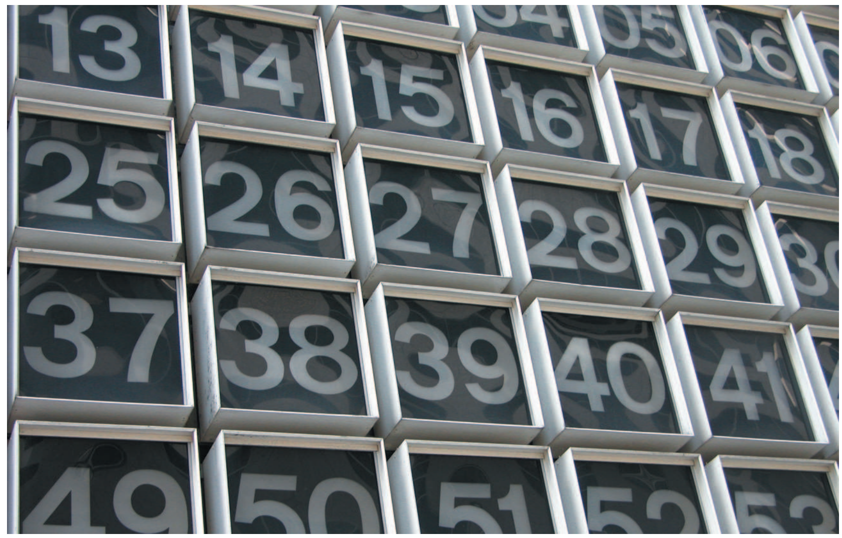
Suma kvadrata

prvih *n* uzastopnih prirodnih brojeva

Alija Muminagić,
Nykøbing F., Danska



Nađeno je mnogo (veoma duhovitih) dokaza da je

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Od tih zaista mnogobrojnih dokaza, u ovom prilogu dajemo dva (manje poznata) dokaza.

Dokaz 1. Lako je provjeriti da vrijedi jednostavan identitet

$$a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = 4a^2$$

za sve realne brojeve a. (Zaista, $a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = a(a^2+2a+1) - a(a^2-2a+1) = a^3 + 2a^2 + a - a^3 + 2a^2 - a = 4a^2$.)

Uvrštavanje za a redom prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots, n$ dobivamo ovaj niz jednakosti:

$$\begin{gathered}
1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^2 \\
2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 2^2 \\
3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2^2 = 4 \cdot 3^2 \\
4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 4^2 \\
5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 4^2 = 4 \cdot 5^2 \\
\cdots \\
n(n+1)^2 - n(n-1)^2 = 4 \cdot n^2.
\end{gathered}$$

Nakon zbrajanja svih tih jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + \ldots \\
&+ n(n+1)^2 - 1 \cdot 0^2 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2^2 \\
&- 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 4^2 - \ldots - n(n-1)^2 \\
&= 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2)
\end{aligned}$$

što zbog

$$1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 = -2 \cdot 2^2,$$
$$2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^2 = -2 \cdot 3^2,$$
$$3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^2 = -2 \cdot 4^2, \ldots$$

i

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2,$$

možemo pisati

$$-2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4^2 - \ldots 2(n-1)^2$$
$$+ (n-1)n^2 + n(n+1)^2 = 4 \cdot S_2,$$

tj.

$$-2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2)$$
$$+ (n-1)n^2 + n(n+1)^2 = 4 \cdot S_2,$$

ili zbog

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2 = S_2 - n^2$$
$$-2(S_2 - n^2) + (n-1)n^2 + n(n+1)^2 4 \cdot S_2$$

odakle nakon sređivanja slijedi da je

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dokaz 2. U ovom dokazu primijenit ćemo dobro poznatu formulu za sumu prvih n uzastopnih prirodnih brojeva, tj.

$$S_1 = \frac{n(n+1)2}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n).$$

Tako je

$$1+2+3+4+\ldots+n = S_1$$
$$2+3+4+\ldots+n = S_1 - \frac{1}{2}(1^2+1)$$
$$3+4+\ldots+n = S_1 - \frac{1}{2}(2^2+2)$$
$$4+\ldots+n = S_1 - \frac{1}{2}(3^2+3)$$
$$\ldots$$
$$n = S_1 - \frac{1}{2}[(n-1)^2+(n-1)]$$

Nakon zbrajanja svih tih jednakosti dobivamo:

$$\underbrace{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \ldots + n \cdot n}_{=S_2}$$
$$= n \cdot S_1 - \frac{1}{2}\underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)}_{S_2 - n^2}$$
$$- \frac{1}{2}\underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))}_{S_1 - n}$$

tj.

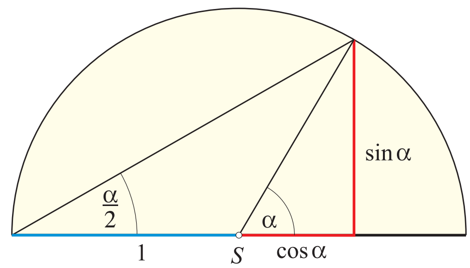
$$S_2 = n \cdot S_1 - \frac{1}{2}(S_2 - n^2) - \frac{1}{2}(S_1 - n)$$

ili

$$\frac{3}{2}S_2 = S_1\left(n - \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{=S_1}$$
$$\iff \frac{3}{2}S_2 = S_1\left(n - \frac{1}{2} + 1\right)$$
$$\iff \frac{3}{2}S_2 = S_1\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\iff S_2 = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{2}}{3}$$
$$\iff S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dokaz bez riječi 2:

Tangens polovičnog kuta



$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$