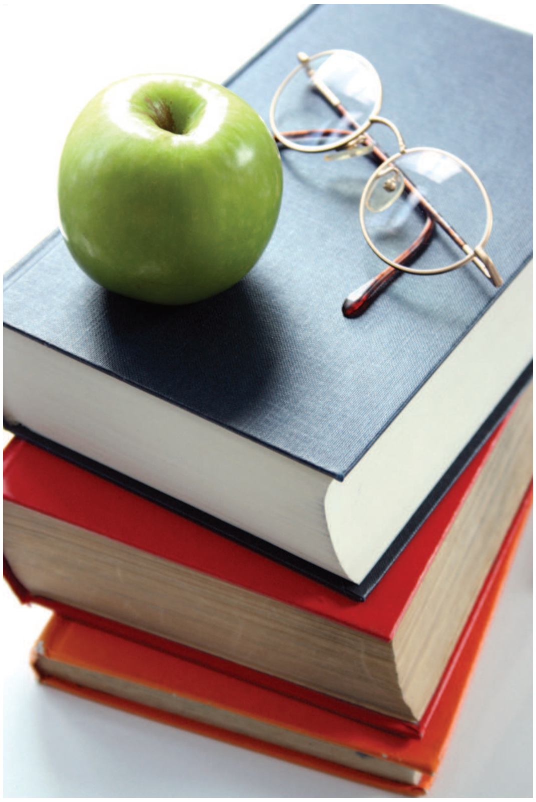
Na drugi pogled

Senka Sedmak, Zagreb

Funkcija čija je derivacija negativna na skupu A ne mora biti padajuća na skupu A



Na prvi pogled može se dogoditi da previdimo svojstvo skupa A koje vodi do tvrdnje iz naslova o funkciji koja nas zanima.

Bit će riječi o realnoj funkciji realne varijable pa se to neće uvijek u daljnjem tekstu navoditi. Također, ne bude li izričito rečeno drukčije, pretpostavljat će se da je $A \in \mathbf{R}$ otvoren, funkcija f na njemu derivabilna (diferencijabilna).

Kao kod ljubavi na prvi pogled, kad nas vlastite nade i očekivanja navode da pretpostavimo određena svojstva osobe koja nas zanima, pametno je i ovdje uputiti drugi pogled.

Taj je drugi pogled namijenjen otkrivanju i uklanjanju jedne sustavne greške iz udžbenika i nastave matematike četvrtog razreda gimnazije.

Radi se o zadacima određivanja intervala pada (ili intervala rasta, ili intervala monotonosti) zadane funkcije f. Ovdje korišteni način zapisivanja ističe da je riječ o genitivu množine riječi "interval". Isti padež jednine iste riječi sastoji se od istih slova, tek je naglasak drukčiji. Nije gramatika razlog isticanja da se ovdje radi o množini. Nesporazum bi mogao imati posljedice po razumijevanje matematike. Ali krenimo otpočetka. Pojam padajuće realne funkcije realne varijable stariji je i širi od pojma takve derivabilne funkcije.

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva – niz – nikad nije derivabilna, ni u kojoj točki limes kojim se definira derivacija funkcije u zadanoj točki ne može postojati smijemo li se kretati samo prirodnim brojevima.

Padajuća može biti i takva funkcija. Slučaj kad je domena skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ ne pokazuje, u pogledu definicije padajuće ili strogo padajuće funkcije, bitne razlike u odnosu na definiciju tih pojmova kad je domena neki drugi podskup od $\mathbf{R}$. Funkcija f je strogo padajuća ako iz $(x_1 < x_2,\ x_1 \in \mathcal{D}(f),\ x_2 \in \mathcal{D}(f))$ slijedi $f(x_1) > f(x_2)$. Ako iz $(x_1 < x_2,\ x_1 \in \mathcal{D}(f),\ x_2 \in \mathcal{D}(f))$ slijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$, kaže se da je f padajuća. Slično se definira strogo padajuća i padajuća funkcija na podskupu njezine domene $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Lako je dokazati da je $f(x) = \dfrac{1}{x!}$ $(x \in \mathbf{N})$ strogo padajuća, ali ne tehnikom deriviranja.

Zadaci iz zbirke za 4. razred koje želimo komentirati odnose se na funkcije koje jesu derivabilne u svakoj točki svoje domene. Ovdje se želi osporiti zaključak iskazan u rješenjima zbirke (iako nigdje jasno formuliran) da je takva funkcija nužno padajuća na skupu $\{x \in \mathcal{D}(f) : f'(x) < 0\}$.

Citirajmo primjer:

Zadatak: Odredi interval pada funkcije $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$. Ponuđeno rješenje je $\mathbf{R} \setminus \{4\}$.

Za početak konstatirajmo da $\mathbf{R} \setminus \{4\}$ nije interval. Sada to izgleda kao suvišno cjepidlačenje, ali moglo bi se pokazati logičnim zapažanjem.

Potražimo argumente koji su rješavače naveli da pomisle kako je zadana funkcija f padajuća na skupu $A = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, a onda im pridružimo argumente tvrdnji da nije tako.

Prirodna domena funkcije f je skup $A = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, otvoren skup na kojem je f derivabilna. Vrijedi $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-4)^2}$ pa je $f'(x) < 0 \ \forall x \in A$.

Sada dolazi dio koji se ovdje želi osporiti. U rješenjima zadataka tvrdi se da je funkcija f padajuća na skupu A.

Ako je to istina, onda iz $(x_1, x_2,\ x_1 \in A,\ x_2 \in A)$ slijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$. Odaberimo $x_1 = 0 \in A$, $x_2 = 5 \in A$, $x_1 < x_2$. Tada je $f(x_1) = f(0) = \dfrac{1}{4}$, $f(x_2) = f(5) = 9$ pa je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcija f nije padajuća na skupu A. Istina je, međutim, da f jest padajuća na $\langle -\infty, 4\rangle$ i također f jest padajuća na $\langle 4, \infty\rangle$. Mogu se nabrojiti dva disjunktna neproširiva intervala na kojima je f padajuća i ponuditi ih kao rješenje zadatka $\langle -\infty, 4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$. Jasno, i u formulaciji zadatka trebalo je koristiti množinu i tražiti "intervale pada". Ne može se, međutim, unija tih dvaju intervala ponuditi kao rješenje zadatka. Funkcija f, kao što je bilo pokazano, nije padajuća na $A = \langle -\infty, 4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle = \mathbf{R} \setminus \{4\}$.

Nije slučajno da se govori o intervalima pada funkcije, a ne o skupu pada funkcije. Ona jedna točka $x = 4$ "kriva" što A nije povezan skup, onemogućava onu ugodnu lakoću zaključivanja od negativnosti derivacije do strogog pada funkcije.

Interval je povezan skup. Definiramo ga prvotno kao skup svih brojeva $x \in \mathbf{R}$ takvih da vrijedi $a < x < b$ (za prethodno izabrane $a, b \in \mathbf{R} :\ a < b$). Ako samo jedan nedostaje, skup nije povezan i ne zove se intervalom. Moguće je i pojam intervala generalizirati, ali je važno pritom zadržati bitna svojstva – otvorenost i povezanost. Tako se uz $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R} :\ a < x < b\}$ intervalima zovu, za zadani $a \in \mathbf{R}$, još i skupovi $\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \mathbf{R} :\ x < a\}$, $\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbf{R} :\ x > a\}$.

Otvorenost skupa je nužan uvjet za uvođenje pojma derivacije. Bilo je istaknuto da u slučaju niza taj uvjet nije ispunjen.

Povezanost intervala je važna jer garantira ono što nam se moglo brzopleto i pogrešno učiniti da vrijedi i općenitije. Funkcija derivabilna u svakoj točki intervala A i takva da je $f'(x) < 0$ na čitavom intervalu A je strogo padajuća na tom intervalu.

Ako A nije interval, kao što se dogodilo u promatranom zadatku, onda negativnost derivacije na A ne povlači zaključak da je ona padajuća na A.

U nastavi bi moglo biti zgodno ukazati na funkciju $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ta funkcija ima negativnu derivaciju u svakoj točki svoje domene (koja nije povezan skup). Apsurdno bi bilo misliti da periodička funkcija može biti strogo padajuća. Izaberemo li bilo koji x_A iz prirodne domene ove funkcije $x_A \in A = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi\}$, onda je $x_2 = x_0 + \pi \in A$, $x_1 < x_2$. Ali nije $f(x_1) > f(x_2)$, nego je $f(x_1) = f(x_2)$. Zgodna je vježba za učenike da sami potraže kontraprimjer za koji će vrijediti $(y_1 \in A, y_2 \in A, y_1 < y_2)$ i uz to $\operatorname{ctg} y_1 < \operatorname{ctg} y_2$.

Važnost povezanosti intervala kod interpretacije derivacije može se pokazati i na lakšem terenu.

Mora li funkcija, čija derivacija iznosi nula na čitavoj domeni nužno biti konstanta? Sugerira se analiza funkcije $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } x < 0 \\ 1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$. Ova funkcija je derivabilna na čitavoj domeni $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i vrijedi $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$. Intervali konstantnosti ove funkcije su $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, \infty\rangle$. Nipošto $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$.

Zbirke će pričekati iduće izdanje, nastava može pogrešku ispraviti odmah.