Suma kvadrata
prvih *n* uzastopnih prirodnih brojeva

Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

U MiŠ-u br. 59 i 60 (travanj i lipanj 2011. g.) objavljena su četiri dokaza (ne tako uobičajena) za sumu $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$. U ovom prilogu dajemo još dva dokaza.

Dokaz 5. Promatrajmo Pascalov trokut (to su binomni koeficijenti $\binom{n}{r}$ za male vrijednosti n i r napisani u obliku tablice) – treći stupac.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$										

Uočavamo da je:

$$2\cdot\binom{2}{2}+1=2\cdot 1+2=4=2^2$$

$$2\cdot\binom{3}{2}+3=2\cdot 3+3=9=3^2$$

$$2\cdot\binom{4}{2}+4=2\cdot 6+4=16=4^2$$

$$2\cdot\binom{5}{2}+5=2\cdot 10+5=25=5^2$$

$$\vdots$$

Slutimo da je

$$2\cdot\binom{k}{2}+k=k^2. \tag{1}$$

Dokazat ćemo identitet (1) algebarski i kombinatorno.

Algebarski dokaz. Imamo:

$$\begin{aligned}2\binom{k}{2}+k&=2\cdot\frac{k!}{2!(k-2)!}+k\\&=\frac{k!+k(k-2)!}{(k-2)!}\\&=\frac{(k-2)!(k-1)!k+k(k-2)!}{(k-2)!}\\&=\frac{k(k-2)!(k-1+1)}{(k-2)!}=k^2.\end{aligned}$$

Kombinatorni dokaz. Neka je broj elemenata skupa A jednak k, tj. $|A|=k$. Tada je prema pravilu množenja (ili produkta) $|A^2|=k^2$, tj. broj svih uređenih parova iz skupa A^2 je k^2.

Sve uređene parove elemenata tog skupa možemo svrstati u dvije disjunktne klase. U jednoj klasi su uređeni parovi (a_i,a_j), a u drugoj (a_i,a_i). Prvih ima $2\cdot\binom{n}{2}$, jer se dva elementa mogu izabrati na $\binom{n}{2}$ načina, a od njih se mogu načiniti dva uređena para. Broj parova druge klase je očito $\binom{n}{1}=n$, pa sada prema pravilu zbroja (sume) slijedi tvrdnja.

Primjenjujući dokazni indentitet (1), imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}\left[2\binom{k}{2}+k\right]\\&=2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}k\end{aligned}$$

$$= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$
$$= 2 \cdot \frac{(n+1)\cdot n \cdot (n-1)}{6} + \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i dokaz 5 je gotov.

Dokaz 6. Sumu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ predstavimo na sljedeći način: neka su $1^2 = 1^2 \cdot 1$, $2^2 = 2^2 \cdot 1$, $3^2 = 3^3 \cdot 1$, $\ldots$, $n^2 = n^2 \cdot 1$ volumeni pravilnih četverostranih prizmi čije su baze (ili osnovke) kvadrati (sa stranicama $1, 2, 3, \ldots, n$) i s jednakim visinama $H_1 = H_2 = \ldots = H_n = 1$. Formirajmo sada tijelo T ovako: na prizmu čija je stranica baze n stavljamo redom prizme sa stranicama baza $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 2, 1, tako da centri baza tih prizmi leže na istom pravcu. Oko tijela T opišimo pravilnu četverostranu piramidu $SABCD$, tako da je $a = AB = n+1$, a $H = SO = n+1$ (sl. 1.).

Volumen tijela T je:

$$V_T = V_{SABCD} - 4(V_1 + V_2 + \ldots + V_k + \ldots + V_n) - V_{SA_1B_1C_1D_1},$$

gdje je s V_k predstavljen volumen tijela na sl. 2. Sa slike 2. vidimo da je:

$$V_k = V_{A_kA_k'A_k''B_kB_k'B_k''} + V_{A_kA_{k+1}A_k''A_k'} + V_{B_kB_{k+1}B_k''B_k'}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2} \cdot k + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{k}{4} + \frac{1}{12}.$$

Volumen opisane piramide je:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}(n+1)^2(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3.$$

Volumen piramide $SA_1B_1C_1D_1$ je:

$$V_{SA_AB_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3},$$

pa je:

$$V_T = \frac{1}{3}(n+1)^3 - 4\Big[\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\Big) + \Big(\frac{2}{4} + \frac{1}{12}\Big) + \ldots + \Big(\frac{k}{4} + \frac{1}{12}\Big)\Big] - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - (1 + 2 + 3 + \ldots + k + \ldots + n) - \frac{n}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \Big(\text{zbog } 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\Big)$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= (\text{nakon sređivanja})$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

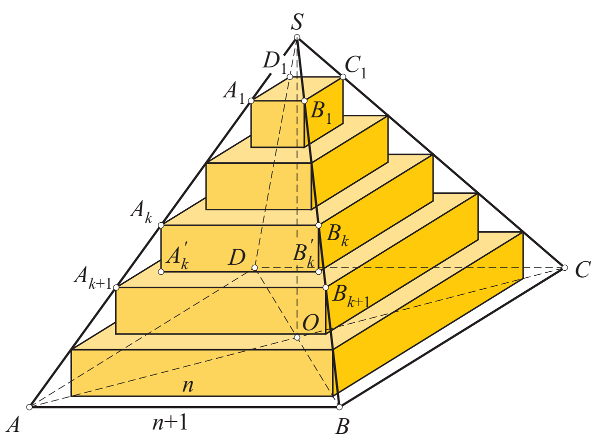
S druge je strane V_T jednako sumi volumena prizmi, tj.:

$$V_T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2, \qquad (3)$$

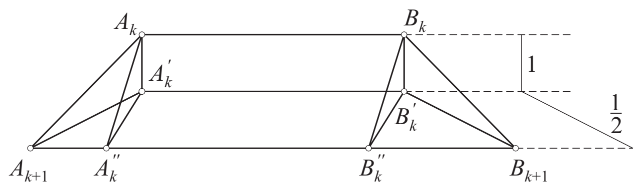
i konačno iz (2) i (3) slijedi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Napomena. U mojim bilješkama piše samo da dokaz 6 potiče od Judit Zoffman, ali nažalost nemam podatak gdje je taj dokaz objavljen i kada. Mislim da je ovaj dokaz pokojna prof. dr. Judit Zoffman dala dok je bila učenica gimnazije.



Slika 1.



Slika 2.