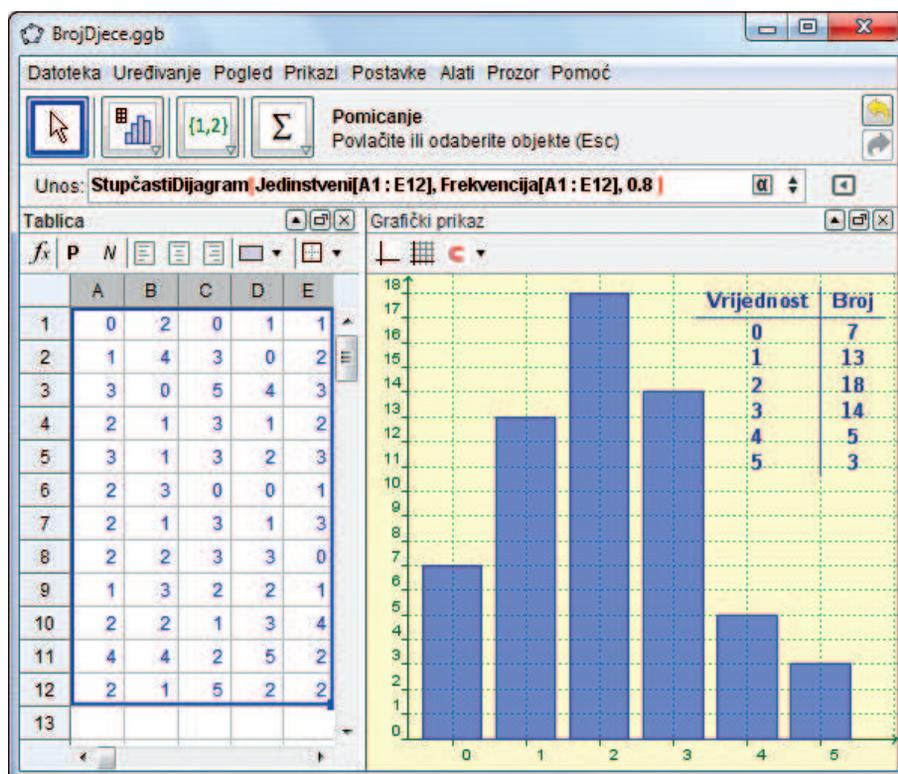


Statistika

uz pomoć programa GeoGebra 4.0

Šime Šuljić, Pazin



Slika 1.

Prilog radionici na 7. stručno-metodičkom skupu, Pula 2011.

Prije nekoliko godina u program matematike sedmog razreda osnovne škole uvedeno je poglavlje *Statistika i vjerojatnost*. Ta cjelina više od ostalih područja nastave matematike vapi za uporabom računala. S računalom je moguća brza i pouzdana obrada velikog broja podataka, kvalitetna statistička analiza i prezentacija rezultata. U današnje vrijeme prikladno se čini posegnuti za računalom u takvim situacijama. To nipošto ne znači da se učenik ne treba upoznati i s klasičnim pristupom pri obradi i analizi podataka. Obilježja podataka, mjere lokacije i mjere raspršenja moraju biti jasni. Na manjoj skupini podataka ne bi trebao biti problem pronaći te mjere uz pomoć kalkulatora ili čak samo uz pomoć papira i olovke. Mislim da to

mora prethoditi uporabi računala, tako da učeniku bude posve jasno što se to određenim naredbama traži od "stroja".

Za statističku obradu podataka postoji jako puno programa. Na školskim računalima instaliran je *Microsoft Office* s programom za tablični proračun *Excel*. Njemu sličan je besplatan program otvorenog koda *Calc* iz programskog paketa *Open Office* u cijelosti preveden na hrvatski jezik (www.openoffice.org). U ovom članku upoznat ćemo se s mogućnostima *GeoGebra*, koja je inačicom 4.0 postala moćan program za statističku analizu i to ne samo elementarnu, nego i višu. *GeoGebra* je jednostavna za uporabu, kako nastavniku,

tako i učeniku. Način rada s proračunskom tablicom sličan je onom u drugim programima, tako da će stečene rutine biti korisne pri korištenju *Excela*, *Calca* i drugih programa. Između *GeoGebra* prozora komunikacija je dvosmjerna. Osim što se promjena podataka u tablici istovremeno odražava na grafički prikaz, moguće je i obrnuto, što s ostalim programima najčešće nije slučaj. Kroz naredbe, posebne prozore, tekstualne i grafičke prikaze očituje se matematički pristup. *GeoGebra* mogućnosti nadilaze razinu statistike koja se traži u osnovnoj i srednjoj školi, ali to učenika u radu ne opterećuje, a može mu pobuditi interes. Osim što možemo koristiti *GeoGebra* kao alat za obradu, analizu i prezentaciju podataka, možemo je rabiti za upoznavanje s temeljnim pojmovima statistike, njihovo razumijevanje i zorno predočavanje.

Klikom na gumb **Preuzmi** na internetskoj stranici www.geogebra.org ponuđeno je pokretanje dviju inačica programa (slika 2). Pokrenite *Webstart 4.0*.

Instalirajte i pokrenite GeoGebra sa svog računala. Dobit ćete ikonu na radnoj površini kako biste program koristili i dok niste na internetu.

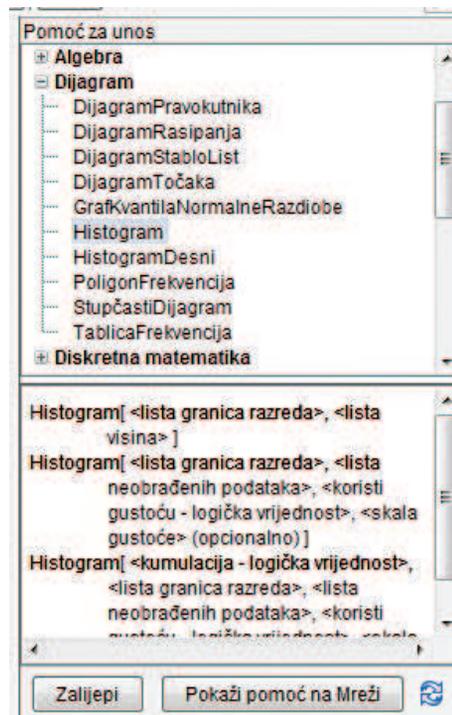


Slika 2.

U izborniku *Prikazi* odaberite *Tablični i grafički* da dobijete *GeoGebra* s dva prozora kao na slici 1. Obratite pažnju na malu ikonu (uokvireni trokutić – slika 3) na desnom rubu *trake za unos*. Klikom na tu ikonu otvara se prozor sa sortiranim naredbama po područjima i ispod njega prozor u kojem se prikazuje sintaksa odabrane naredbe (slika 4). U ovom će nas članku najviše zanimati područja: *Dijagram*, *Statistika* i *Lista*. Obratite pažnju na gumb *Zalijepi* koji odabranu naredbu sa sintaksom izravno prenosi u *traku za unos*. Napomena: koristite tipku *Tab* za prelazak na novi parametar naredbe. Standardno, naredbe se mogu unositi i upisom nekoliko prvih slova pa iz ponuđenih odabranu prihvatiti tipkom *Enter*.



Slika 3.



Slika 4.

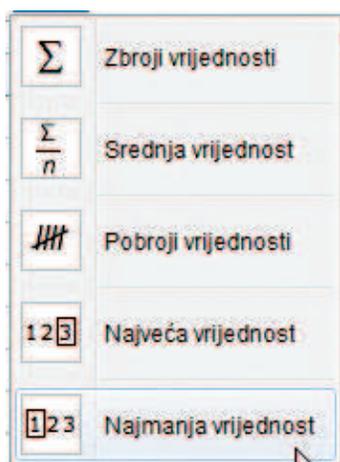
Koje podatke koristiti za obradu u nastavi? I statistika je kao grana matematike apstraktna, ali podaci koje obrađuje vrlo su konkretni i povezani sa životom, društvom, radom, proizvodnjom, trgovinom, meteorologijom itd. Kad god je moguće trebalo bi posezati za stvarnim podacima koji su vezani uz ono što učenike zanima. Podaci bi morali biti vjerodostojni i bez obzira je li riječ o uzorku ili cijeloj populaciji promatranog skupa. Učenici bi i sami mogli prikupiti određene podatke, ali tada treba ukazati na to da kada se provodi ozbiljna anketa ili eksperiment, onda se to radi po određenim pravilima.

Primjer 1. Broj djece po obitelji u kvartu

Podaci koje vidite na slici 1 izmišljeni su. Riječ je o relativno malom broju diskretnih numeričkih podataka čiju je frekvencijsku distribuciju i statističke mjere lako računati na klasičan način i uspoređivati s onim što nam daje računalo. Na neki način “provjeravamo” računalo, odnosno svoje postupke, umjesto da slijepo vjerujemo što god nam iz-

baci. Kad to svladamo, onda se doista možemo uhvatiti u koštac s nekim velikim skupom podataka.

U *GeoGebri* nam je najjednostavnije da skupove podataka do kojih smo sami došli unesemo u ćelije proračunske tablice, kako se to vidi na slici 1. Za obradu tih podataka na raspolaganju nam stoje *alati* proračunske tablice (slika 5) i naredbe koje unosimo kroz *traku za unos*. Za korištenje alata potrebno je odabrati stupac ili redak u *tablici*, a zatim kliknuti na alat. Vrijednost se upisuje u ćeliju na dnu stupca ili desno od retka. Ovaj način obrađivanja podataka prikladan je početnom uhdavanju i učenicima koji tek usvajaju pojmove.



Slika 5.

Raspoložive statističke naredbe puno su moćnije i odnose se na cijeli raspon podataka unesen u tablicu. Vrijednosti naredbi prikazuju se u prozoru *Algebra* ili u *Grafičkom prikazu*, već prema naravi rezultata. Algebarske rezultate moguće je smjestiti i u neku ćeliju *tablice*. Evo nekih naredbi koje možemo dobiti nad danim skupom podataka (slika 1).

- $\text{Jedinstveni}[A1 : E12] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ – daje skup svih različitih vrijednosti koje se javljaju u skupu podataka poredanih po veličini;
- $\text{Frekvencija}[A1 : E12] = \{7, 13, 18, 14, 5, 3\}$ – daje učestalost pojavljivanja jedinstvenih podataka redom;
- $\text{TablicaFrekvencija}[A1 : E12]$ – daje tablicu frekvencija kao tekst u grafičkom prikazu kakav vidite na slici 1;
- $\text{StupčastiDijagram}[\langle \text{lista podataka} \rangle, \langle \text{lista frekvencija} \rangle]$ – traži dva parametra. Ako smo ih već odredili, možemo dati njihove nazive ili unijezditi naredbe, kako se to vidi u traci za unos na slici 1. Rezultat se vidi u grafičkom prozoru na slici 1, s time da je dodan i treći parametar: širina stupca;
- $\text{AritmetičkaSredina}[A1 : E12] = 2.1$;
- $\text{NajčešćaVrijednost}[A1 : E12] = \{2\}$ – riječ je o pojmu koji se još zove *mod*. Rezultat je skup jer ponekad mogu biti dvije ili više takvih vrijednosti;
- $\text{Medijan}[A1 : E12] = 2$ – riječ je o podatku od kojeg je 50% podataka manje ili jednako, odnosno 50% je veće od te vrijednosti.

Zadatak 1. Analizirajte učestalost izvučenih brojeva u igri Hrvatske lutrije 7 od 39 tijekom 2010. godine. Podatke prikazite stupčastim dijagramom i tablicom frekvencija. Jesu li izvučeni svi brojevi? Koji su najmanje puta, a koji najviše? Koliki je raspon frekvencija?

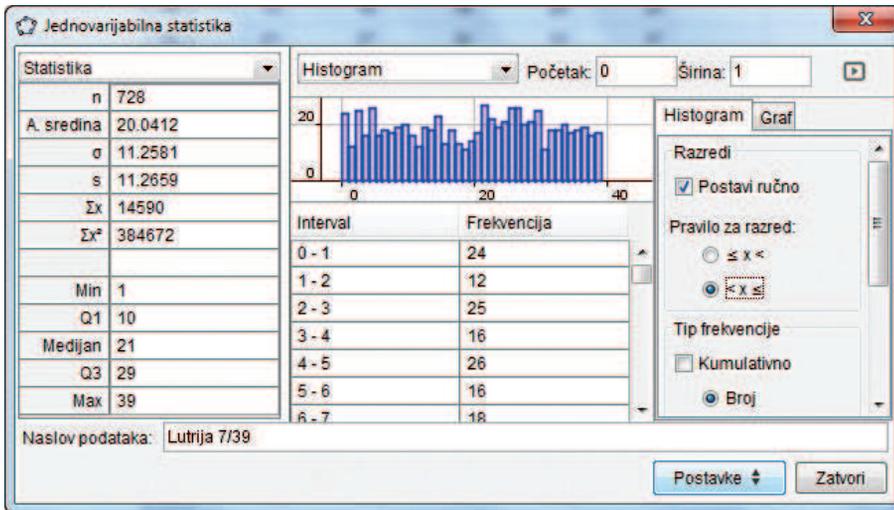
Uputa. Podatke preuzeti iz arhive s internetske stranice Hrvatske lutrije. Radi se o 104 izvlačenja godišnje po sedam brojeva. Moguće je izravno unijeti te podatke iz *Excela*. Desni klik na neku ćeliju otvara skočni izbornik na kojem je ponuđen *Uvoz podataka*. Moguće je podatke prenijeti koristeći naredbe *Kopiraj – Zalijepi*.

Rješenje postavljenog zadatka može se vidjeti na slici 6. *GeoGebra* ima moćne kalkulatorne koje aktivirate jednim klikom, a daju široku lepezu mjera. Nalaze se u alatnoj traci proračunske tablice. Na slici vidite što sve može dati *Jednovarijabilni kalkulator*. Potrebno je samo obuhvatiti ćelije na koje se odnosi.

Primjer 2. Visine ljudi

Mjerenjem su utvrđene visine 123 učenika u 4 razreda:

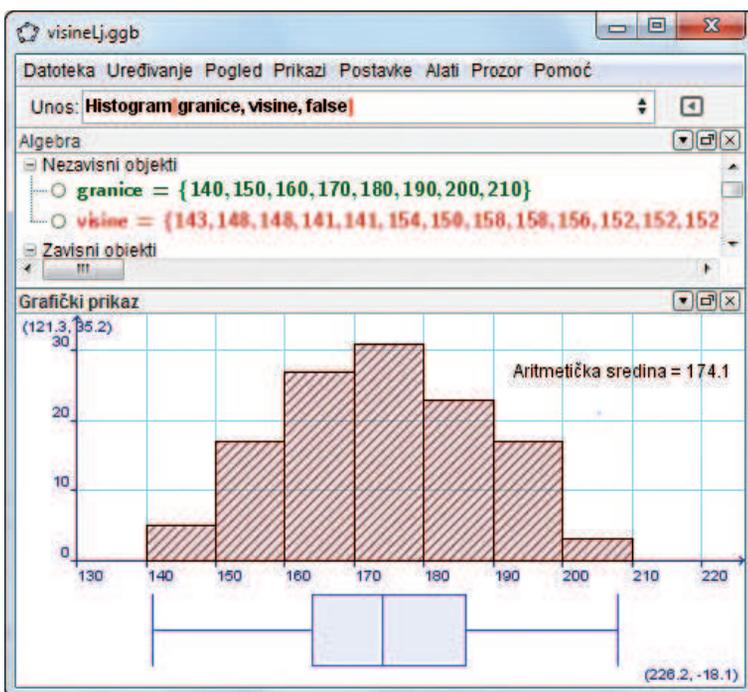
143, 148, 148, 141, 141, 154, 150, 158, 158, 156, 152, 152, 152, 154, 158, 154, 153, 157, 155, 157, 158, 158, 160, 166, 162, 168, 168, 164, 161, 167, 161, 167, 168, 168, 168, 161, 169, 168, 169, 166, 160, 164, 162, 169, 167, 164, 169, 167, 161, 173, 174, 179, 170, 174, 179, 171, 176, 177, 176, 179, 177, 171, 170, 178, 172, 177, 175, 170, 173, 176, 177, 174, 174, 178, 177, 172, 176, 179,



Slika 6.

Uočimo da je riječ o skupu podataka s neprekidnim vrijednostima. U tu svrhu najbolje će biti podatke podijeliti u razrede i prikazati ih histogramom. Najmanja vrijednost je 143, a najveća 205. Podatke se može podijeliti u sedam razreda s granicama: $[140, 150)$, $[150, 160)$, i sve tako redom do 210.

U *GeoGebra* osim kroz proračunsku tablicu možemo unositi podatke i u *algebarski prikaz* kao tzv. liste, odnosno skupove brojeva unutar vitičastih zagrada. Na slici 7 vidite skupove granica razreda i skup svih izmjerenih visina.



Slika 7.

177, 178, 180, 181, 187, 185, 180, 182, 187, 182, 180, 188, 188, 180, 187, 185, 188, 180, 187, 188, 182, 186, 186, 189, 183, 194, 197, 194, 194, 198, 191, 195, 192, 193, 194, 191, 194, 199, 197, 199, 198, 194, 201, 204, 208.

Potrebno je grafički prikazati frekvencijsku distribuciju podataka i izračunati obilježja skupa.

Ako nas zanima koliki je broj unesenih podataka, dovoljno je da napišemo naredbu `Duljina[visine]`. Isto tako možemo koristiti naredbe:

- `Minimum[visine]` i `Maksimum[visine]`
- `AritmetičkaSredina[visine]`
- `Medijan[visine]`
- `SD[visine]` – standardna devijacija itd.

Histogram je zadan naredbom `Histogram[granice, visine, false]`. Ovdje riječ `false` ima značenje logičkog operatora negacije, koji onemogućuje prikaz visine stupaca s relativnom frekvencijom i pokazuje ih s apsolutnim vrijednostima razlomka. Obratite pažnju na to da je koordinatni sustav prilagođen skupu podataka, da su prikazane samo pozitivne vrijednosti na osima. Štoviše, ishodište se nalazi u točki (130, 0). To se postiže na karticama dijaloškog okvira `Postavke > Postavke`.

U posljednje je vrijeme u prikazu podataka popularan dijagram pravokutnika ili "brkata kutija". Na slici 7 vidite je ispod histograma, a njegovo ćemo značenje objasniti na sljedećem primjeru.

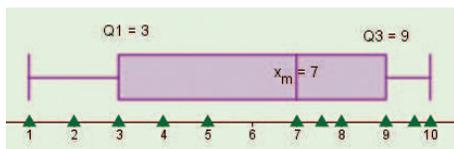
Primjer 3. "Brkata kutija"

Iz dijagrama pravokutnika izravno možemo očitati medijan, donji i gornji kvartil, raspon podataka i ekstremne vrijednosti. Kvartili su mjere raspšenja skupine podataka. Donji kvartil dijeli podatke tako da je ispod njega 25%, a iznad njega 75% svih podataka. Gornji kvartil obrnuto.

Demonstraciju značenja dijagrama pravokutnika u *GeoGebri* napraviti ćemo vrlo jednostavno. Na osi apscisa nacrtajmo proizvoljan broj točaka koje se mogu slobodno po njoj pomicati. Zadajmo listu koja se sastoji od apscisa tih točaka ovako:

$$\text{apscise} = \{x(A), x(B), \dots\}$$

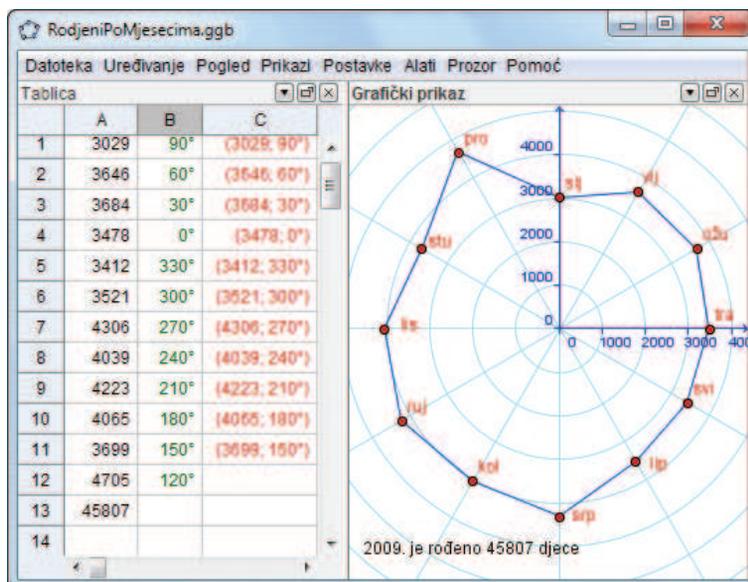
Zadajmo naredbu *DijagramPravokutnika*[2, 1, apscise]. Ovdje parametar 2 označava pomak dijagrama po osi y, a parametar 1 širinu dijagrama. Pomicite sada točke i promatrajte učinak.



Slika 8.

Primjer 4. Rođeni po mjesecima 2009.

Dobar izvor podataka može biti Državni zavod za statistiku koji redovito objavljuje mjesečna izvješća (www.dzs.hr). Tako redovito objavljuje i broj rođenih po mjesecima, a kako imamo osjećaj da se mjeseci "vrte u krug" možemo iskoristiti polarnu koordinatnu mrežu za prikaz podataka u zvjezdasastom obliku. Priložena bi slika trebala biti dovoljna uputa za izradu takvog dijagrama. Napominjem da se drugi i treći stupac dobiju razvlačenjem prve i druge ćelije, odnosno samo prve.



Slika 9.

Razni dijagrami. *GeoGebra* raspolaže još nekim vrstama dijagrama, kao što su *stablo-list*, *točkasti dijagram*, *poligonalni dijagram* itd. No nije na raspolaganju sve ono šarenilo kojim raspolažu neki programi. Zapravo se ti dijagrami ne razlikuju u svojoj biti i pitanje je koliko su uopće potrebni. Ali zasigurno ćete uočiti nedostatak *tortnog dijagrama*. Opet možemo postaviti pitanje nije li bolje da učenici izračunavaju relativne postotke, pa onda pripadne dijelove punog kuta i na kraju *GeoGebra* geometrijskim priborom konstruiraju kružne isječke. Vjerojatno da, ali budite bez brige. Ono što ne izradi *GeoGebra* tim programera dorade korisnici. Prošli tjedan pojavile su se čak tri *GeoGebra* s korisnički definiranim alatom koji crta tortni dijagram. Možete ih pronaći na adresi www.geogebraTube.org. Riječ je o servisu poput *YouTubea* na koji korisnici stavljaju svoje uratke izrađene u *GeoGebri*. I neka to bude poruka za kraj: svakako upoznajte taj servis.

Primjere i podatke možete preuzeti u digitalnom obliku na adresi: <http://tinyurl.com/mis61>.