Nizovi

2. dio: Neki posebni nizovi

Anđelko Marić, Sinj

Prema nastavnom programu nastave matematike u našim srednjim školama, učenici imaju prigodu upoznati nizove tek u završnom razredu četverogodišnjih škola. Prema tom programu, učenici moraju ovladati dvama posebnim nizovima: *aritmetičkim* i *geometrijskim*.

Mislim da se to, u metodičkom pogledu, u našim školama ne radi baš najbolje. Navest ćemo i pokušati objasniti neke zamjerke, a potom ćemo upoznati neke posebne nizove.

Učivo iz tog dijela programa prenosi se, prema nekoj inerciji, onako kako su ga sadašnji profesori slušali od nekadašnjih svojih profesora, i tako iz naraštaja u naraštaj. Zato se često niz, kao važan matematički pojam, uopće ne definira i prepušta se učeniku da ga sam intuitivno prihvati. Tomu pridonesu i neki udžbenici u kojima se, bez ikakve priprave, odmah počinje s obradom aritmetičkog niza, a da se uopće ne kaže što je to niz.

Uobičajeno, taj se niz definira otprilike ovako:

Aritmetički niz je niz brojeva u kojemu je razlika svakog člana i njemu prethodnog člana stalan broj.

Pročitajmo još jednom samo početak ove definicije: Aritmetički niz je niz brojeva... Ne bi li ovo trebalo značiti da učenik zna što je niz? Osim toga ovo ne vrijedi za svaki član niza jer ne postoji prethodni član prvog člana.

U prošlom broju MIŠ-a govorili smo o zadanosti niza i spomenuli da niz može biti zadan i *rekurzijskom relacijom*, ali da je najprikladnije ako je niz zadan funkcijskom jednadžbom $a_n = a(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

U mnogim problemima o nizovima zadanim rekurzijom, najprije treba odrediti formulu za opći član niza (što može biti i složeno) i tek tada ići na daljnje rješavanje problema.

No vratimo se navedenoj definiciji aritmetičkog niza.

Ako razliku dvaju susjednih članova tog niza označimo s d, dolazimo do relacije

$$a_{n+1} - a_n = d$$

(što je bolje od $a_n - a_{n-1} = d$, kako često piše). Ovo se može pisati ovako:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad d \in \mathbf{R}.$$

Ova posljednja relacija znači da je niz zadan rekurzijom.

Sama je praksa pokazala da se, izravno primjenjujući uobičajenu definiciju, ne može mnogo učiniti. Zato se obično dalje nastavlja tako da se, iz te definicije, dokazuje formula $a_n = a_1 + (n-1)d$, što je zapravo formula oblika $a_n = a(n)$. Dalje se obično navodi da se ovakav niz zove aritmetički, gdje je svaki član *aritmetička sredina* dvaju susjednih članova, pri čemu se često zaboravi isključiti prvi član. To se onda još provjeri na nekoliko primjera i stvar se smatra gotovom.

Ako smo se već, nakon stoljetnih traganja, opredijelili da niz (gdje je god to moguće) definiramo formulom $a_n = a(n)$ onda je normalno očekivati da tako definiramo i aritmetički niz.

Pokazat ću kako sam to ja dugo vremena radio u razredu.

Definicija. *Niz (a_n) zadan formulom*

$$a_n = dn + c; \quad d, c \in \mathbf{R}, \quad d \neq 0$$

zove se aritmetički niz.

Svojstva članova aritmetičkog niza su:

1) Razlika svakog člana niza (osim prvog) i njemu prethodnog člana je stalna i jednaka d, gdje je d realan broj iz definicije niza.

   Dokaz:

$$a_{n+1} - a_n = d(n+1) + c - dn - c = d.$$

2) Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) je aritmetička sredina dvaju susjednih članova.

   Dokaz:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{d(n-1) + c + d(n+1) + c}{2} = \frac{2dn + 2c}{2} = dn + c = a_n.$$

3) Svaki član aritmetičkog niza je aritmetička sredina dvaju jednako udaljenih članova niza, ako takav "lijevi" član postoji.

$$\left(\frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2} = a_n, \quad p \in \mathbf{N} \right)$$

4) Ako su r i s bilo koja dva prirodna broja i $a(n)$ aritmetički niz, tada vrijedi:

$$a_{r+s} = a_r + sd = a_s + rd.$$

Dokazi tvrdnja 3) i 4) jednostavni su i prepuštaju se čitatelju.

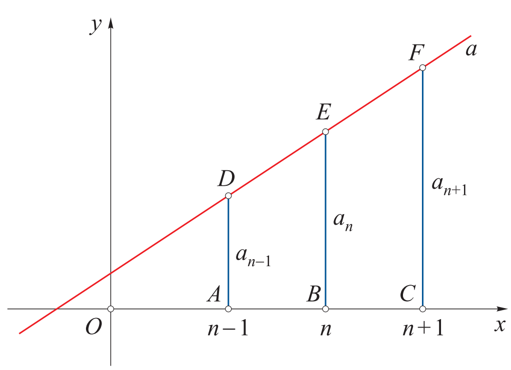
Može se dokazati da su navedena svojstva međusobno ekvivalentna i ekvivalentna definiciji niza. To znači da niz koji ima jedno od tih svojstava ima i ostala svojstva i da ne postoji nijedan drugi niz koji ima jedno od tih svojstava, osim niza $a_n = dn + c$.

Pokažimo još jednu prednost ovakvog pristupa obradi aritmetičkog niza.

Neka je funkcija $a(x)$ zadana formulom

$$a(x) = dx + c; \quad d, c \in \mathbf{R}, \quad d \neq 0.$$

Graf te funkcije je pravac koji označimo s a, kao na slici.



Na osi x su točke A, B i C, čije su apscise redom $n-1$, n i $n+1$; $n \in \mathbf{N}$. Neka su D, E i F točke pravca a, tako da su ortogonalne projekcije tih točaka na os apscisa upravo točke A, B i C.

Koordinate točke E su $E\ (n, a(n))$ i analogno za točke D i F.

Promatrajmo niz $a_n = dn + c$. Vrijedi $|BE| = a(n) = a_n$. Isto je tako $|AD| = a(n-1) = a_{n-1}$ i $|CF| = a(n+1) = a_{n+1}$.

Zaključujemo da su ordinate točaka D, E i F tri uzastopna člana aritmetičkog niza $a(n)$.

Zbog sličnosti vrijedi $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$.

Isto je tako dužina $\overline{BE}$ srednjica trapeza $ACFD$, zbog čega je $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$.

Na ovaj smo način pokazali da za članove aritmetičkog niza vrijede svojstva koja smo upravo dokazali.

Slično možemo definirati i geometrijski niz, a potom dokazati svojstva koja imaju članovi tog niza.

Definicija. *Niz (a_n) zadan formulom*

$$a_n = rq^n; \quad r, q \in \mathbf{R}, \ \ r \neq 0, \ \ q \neq 0, 1$$

zove se geometrijski niz.

Svojstva članova geometrijskog niza su:

1) Kvocijent svakog (osim prvog) člana geometrijskog niza i njemu prethodnog člana je stalan broj i jednak broju q iz definicije niza.

   Dokaz:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{rq^{n+1}}{rq^n} = \frac{q^n \cdot q}{q^n} = q.$$

2) Apsolutna vrijednost svakog (osim prvog) člana geometrijskog niza jednaka je geometrijskoj sredini apsolutnih vrijednosti dvaju susjednih članova tog niza.

   Dokaz:

$$\sqrt{|a_{n-1}| \cdot |a_{n+1}|} = \sqrt{|a_{n-1} \cdot a_{n+1}|}$$
$$= \sqrt{|rq^{n-1} \cdot rq^{n+1}|} = \sqrt{|r^2 q^{2n}|} = |rq^n| = |a_n|.$$

Vidjeli smo da su ova dva jedina niza koji se proučavaju u srednjoj školi i koji se dovode u vezu s istoimenim sredinama.

Osim tih dviju, znamo da postoje još dvije takozvane osnovne sredine. To su *harmonijska* i *kvadratna* sredina.

Podsjetimo se definicija tih sredina.

Označimo li harmonijsku, geometrijsku, aritmetičku i kvadratnu sredinu dvaju pozitivnih brojeva x i y, redom H, G, A i K, tada definiramo:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \qquad G = \sqrt{xy},$$

$$A = \frac{x+y}{2}, \qquad K = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Analogno se te sredine definiraju i za tri ili više pozitivnih brojeva.

Usput spomenimo da za navedene sredine vrijedi poznati sustav nejednakosti. Naime, ako je zadan skup pozitivnih brojeva $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tada za osnovne sredine tog skupa vrijedi niz nejednakosti:

$$\min X \leq H \leq G \leq A \leq K \leq \max X,$$

pri čemu u svim nejednakostima vrijedi jednakost ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Logično je pitanje: Ako za dvije od tih sredina postoje nizovi kojima je svaki član odgovarajuća sredina dvaju susjednih članova, vrijedi li to za ine dvije sredine?

Ako takvi nizovi postoje, kako ih definirati?

Pretpostavimo da postoji niz $h(n)$ u kojem je svaki član (osim prvog) harmonijska sredina dvaju susjednih članova.

Prema definiciji harmonijske sredine vrijedi:

$$h_n = \frac{2}{\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}}}, \qquad \frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}} = \frac{2}{h_n}.$$

Uvedemo li zamjenu $\frac{1}{h_n} = a_n$, dobijemo:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n,$$

odakle zaključujemo da su recipročne vrijednosti članova niza (h_n) članovi aritmetičkog niza.

Tako, primjerice, iz aritmetičkog niza $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$, jednostavno dobijemo niz $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}, \ldots$ Svaki član (osim prvog) tog niza je harmonijska sredina dvaju susjednih članova. Zato ga, po analogiji na aritmetički i geometrijski niz, zovemo *harmonijski niz* (u širem smislu).

Najjednostavniji aritmetički niz je niz $a_n = n$, to jest niz prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$. Zato je najjednostavniji harmonijski niz $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Često se pod pojmom harmonijskog niza podrazumijeva upravo ovaj poseban takav niz. To se pogotovu odnosi na pripadni red $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, koji se uobičajeno naziva (samo) *harmonijski red*.

Na isti način možemo pokazati da postoji niz (k_n) u kojem je svaki član,osim prvog, kvadratna sredina dvaju susjednih članova.

Ako takav niz postoji, tada vrijedi

$$k_n = \sqrt{\frac{k_{n-1}^2 + k_{n+1}^2}{2}}, \quad k_n^2 = \frac{k_{n-1}^2 + k_{n+1}^2}{2}.$$

Odavde zaključujemo da su kvadrati članova traženog niza članovi aritmetičkog niza. Ovako određen niz (k_n) zove se *kvadratni niz*.

To možemo kazati i ovako. Ako je (a_n) aritmetički niz s pozitivnim članovima, tada je $(k_n) = (\sqrt{a_n})$ kvadratni niz.

Takvi su primjerice nizovi $\sqrt{1}, \sqrt{5}, 3, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \ldots$ i $\sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{24}, \sqrt{31}, \ldots$.

Primjer 1. U nizu (a_n) zadano je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{1}{5}$. Postoji li niz tako da je drugi član harmonijska, treći član geometrijska, četvrti član aritmetička i peti član kvadratna sredina dvaju susjednih članova?

Rješenje: Ako takav niz postoji, tada su brojevi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ i a_3 uzastopni članovi harmonijskog niza. Zato su brojevi 2, 5 i $\frac{1}{a_3}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, odakle je $\frac{1}{a_3} = 8$, to jest $a_3 = \frac{1}{8}$.

Brojevi a_2, a_3 i a_4 članovi su geometrijskog niza, odakle je $a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4}$ ili $a_4 = \frac{a_3^2}{a_2}$, $a_4 = \frac{5}{64}$.

Isto su tako brojevi $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{64}$ i a_5 uzastopni članovi aritmetičkog niza, odakle je $a_5 = \frac{1}{32}$.

Sljedeći šesti član niza dobijemo iz formule koja vrijedi za članove kvadratnog niza $a_5 = \sqrt{\frac{a_4^2 + a_6^2}{2}}$ ili $a_6^2 = 2a_5^2 - a_4^2 = \frac{2}{32^2} - \frac{25}{64^2} = \frac{8-25}{64^2} < 0$. Zaključujem da šesti član niza nije realan broj, zbog čega ne postoji takav realni niz.

Da smo u uvjetima zadatka dopustili da članovi niza mogu biti kompleksni brojevi (takav se niz zove *kompleksan niz*), tada bi zadatak imao rješenje.

Sada ćemo definirati jednu vrstu nizova koji se mogu shvatiti kao restrikcija polinoma n-tog stupnja.

Definicija. Niz (a_n) zadan ovako:

$$a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0;$$
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}, \ \alpha_k \neq 0, \ k \in \mathbf{N}$$

zove se *polinomni niz* k-tog stupnja.

Najjednostavniji takav niz je niz prvog stupnja, za $k = 1$; $a_n = \alpha_1 n + \alpha_0$ ili uz uobičajenije oznake $a_n = dn + c$, to je poznati, već ovako definirani aritmetički niz.

Isto tako niz $a_n = \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0$ ili $a_n = an^2 + bn + c$ je polinomni niz drugog stupnja.

Definicija. Za zadani niz (a_n), niz (b_n) zadan ovako:

$$b_n = a_{n+1} - a_n,$$

zove se niz (prvih) razlika niza (a_n).

Tako, na primjer, za niz $17, 20, 25, 13, 15, 30, 35, 40, 39, \ldots$, niz prvih razlika glasi:

$$3,\ 5,\ -12,\ 2,\ 15,\ 5,\ 5,\ -1, \ldots.$$

Niz prvih razlika ovako definiranog niza (b_n), niz (c_n) je niz drugih razlika niza (a_n).

Zato, za zadani niz (a_n) članovi niza (c_n) su: $2,\ -17,\ 14,\ 13,\ 10,\ 0,\ -6, \ldots$.

Niz prvih razlika aritmetičkog niza stalan je niz, što neposredno slijedi iz $a_{n+1} - a_n = d$, za svaki prirodan broj $n > 1$.

Niz prvih razlika geometrijskog niza kvocijenta q jest geometrijski niz zajedničkog kvocijenta q. Dokažimo to.

Ako je $a_n = rq^n$, tada je

$$b_n = a_{n+1} - a_n = rq^{n+1} - r^q = rq^n(q-1) = sq^n,$$

gdje je $s = r(q-1)$.

Odavde, prema svojstvima geometrijskog niza, zaključujemo da je niz (b_n) geometrijski s kvocijentom q.

Sada ćemo navesti neka svojstva niza $a_n = an^2 + bn + c$.

Primjer 2. Zadan je niz $a_n = 2n^2 - n + 3$.

a) Odredi deset početnih članova niza.

b) Odredi početne članove niza (b_n), niza prvih razlika niza (a_n).

c) Odredi početne članove niza (c), niza drugih razlika niza (a_n).

d) Što naslućuješ o nizovima (b_n) i (c_n)?

Rješenje:

a) $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 4,$
$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 + 3 = 9,$
$a_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 18.$
Isto tako izračunamo daljnje članove niza (a_n) i dobijemo: $4,\ 9,\ 18,\ 31,\ 48,\ 69,\ 94,\ 123,\ 156, \ldots$.

b) Početni članovi niza (b_n) su: $5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25, 29, 33, \ldots$.

c) Početni članovi niza (c_n) su: $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4, \ldots$.

Na temelju svojstava aritmetičkog niza, naslućujemo da je niz (b_n) aritmetički.

Isto tako vidimo da su svi napisani članovi niza (c_n) međusobno jednaki i naslućujemo da je taj niz stalan.

Ovo vrijedi općenito za svaki niz oblika $a_n = an^2 + bn + c$, što ćemo dokazati u sljedećem primjeru.

Primjer 3. Dokaži općenito da je niz prvih razlika niza $a_n = an^2 + bn + c$ aritmetički, a niz drugih razlika stalan niz.

Rješenje: Označimo li s (b_n) niz prvih i s (c_n) niz drugih razlika, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c \\ &= 2an + (a+b). \end{aligned}$$

Vidimo da je niz (b_n) oblika $b_n = dn + c$ zbog čega je taj niz aritmetički.

Niz drugih razlika niza (a_n) je niz prvih razlika niza (b_n).

Zato je

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n+1} - b_n \\ &= 2a(n+1) + (a+b) - 2an - (a+b) = 2a; \end{aligned}$$
$$c_n = 2a \in \mathbf{R}.$$

Zaključujemo da je (c_n) stalan niz.

Na isti se način dokaže da je niz prvih razlika polinomnog niza stupnja n polinomni niz stupnja $n-1$. To neposredno slijedi iz definicije $b_n = a_{n+1} - a_n$. Iz toga također slijedi da je niz $n-1$ razlika polinomnog niza n-tog stupnja aritmetički i niz n-tih razlika tog niza stalan niz.

Primjer 4. Ovu posljednju tvrdnju provjeri za polinomni niz trećeg stupnja.

Rješenje: Treba dokazati da je niz trećih razlika niza

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d;\ a,b,c,d \in \mathbf{R},\ a \neq 0$$

stalan niz.

Za niz prvih razlika tog niza vrijedi:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d \\ &\quad - (an^3 + bn^2 + cn + d) \\ &= a[(n+1)^3 - n^3] + b[(n+1)^2 - n^2] \\ &\quad + c(n+1-n) \\ &= a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n+1) + c \\ &= 3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c). \end{aligned}$$

Isto je tako niz drugih razlika:

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n+1} - b_n \\ &= 3a(n+1)^2 + (3a+2b)(n+1) + (a+b+c) \\ &\quad - [3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c)] \\ &= 3a[(n+1)^2 - n^2] + (3a+2b)(n+1-n) \\ &= 6an + (6a+2b). \end{aligned}$$

Konačno je niz trećih razlika:

$$\begin{aligned} d_n &= c_{n+1} - c_n \\ &= 6a(n+1) + 6a + 2b - 6an - 6a - 2b, \end{aligned}$$

to jest

$$d_n = 6a \in \mathbf{R}.$$

Primjer 5. Odredi formulu za zbroj početnih n članova niza $a_n = an^2 + bn + c$.

Rješenje: Treba izračunati

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_1^n a_n = \sum_1^n (an^2 + bn + c) \\ &= a\sum_1^n n^2 + b\sum_1^2 n + c\sum_1^n 1 \\ &= a \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + b \cdot \frac{n(n+1)}{2} + c \cdot n \\ &= \frac{n[a(n+1)(2n+1) + 3b(n+1) + 6c]}{6} \\ &= \frac{n}{6}[a(2n^2 + 3n + 1) + 3bn + 3b + 6c]. \end{aligned}$$

Konačno:

$$s_n = \frac{n}{6}[2an^2 + 3(a+b)n + (a + 3b + 6c)].$$

Postoji postupak kojim se može odrediti zbroj

$$s = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k; \quad nk \in \mathbf{R}$$

(vidi A. Marić: *Konačni zbrojevi*, Element, Zagreb, 1998.)

Pomoću tih formula može se izračunati n-ti djelomični zbroj svakoga polinomnog niza.

Primjer 6. U nizu (a_n) zadano je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

a) Odredi deset početnih članova niza tako da su članovi s parnim indeksom aritmetička sredina, a članovi s neparnim indeksom (osim prvog člana) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

b) Odredi formulu za opći član niza (b_n) koji je podniz niza (a_n) s neparnim indeksima.

c) Odredi formulu za opći član niza (c_n) koji je podniz niza (a_n) s parnim indeksima.

d) Odredi formulu za opći član niza (a_n).

Rješenje:

a) Na temelju definicija aritmetičke i geometrijske sredine napišimo početne članove niza (a_n): $1, 2, 3, \frac{9}{2}, 6, 8, 10, \frac{25}{2}, 15, 18, \ldots$

b) Isto tako možemo odrediti početne članove niza (b_n) : $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

Za nađene članove niza početni članovi niza prvih razlika su: $2, 3, 4, 5, \ldots$, odakle naslućujemo da je niz oblika $b_n = an^2 + bn + c$. Odavde je, za $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ 4a + 2b + c &= 3, \\ 9a + 3b + c &= 6. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 0.$$

Zato je

$$b_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{ili} \quad b_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

c) Početni članovi niza (c_n) su: $2,\ \frac{9}{2},\ 8,\ \frac{25}{2},\ 18, \ldots$. Te članove možemo pisati i ovako

$$\frac{1}{2}\cdot 4,\ \frac{1}{2}\cdot 9,\ \frac{1}{2}\cdot 16,\ \frac{1}{2}\cdot 25,\ \frac{1}{2}\cdot 36,\ \ldots$$

Opći član niza je $c_n = \frac{1}{2}(n+1)^2$.

d) Ove formule vrijede za nekoliko početnih članova niza. Podsjetimo se da odatle ne smijemo zaključiti da one vrijede za *sve* članove niza. Pretpostavimo li da to vrijedi, treba još dokazati:

1. Aritmetička sredina dvaju susjednih članova niza (b_n) je član niza (c_n).
2. Geometrijska sredina dvaju susjednih članova niza (c_n) je član niza (b_n).

Dokaz:

1.

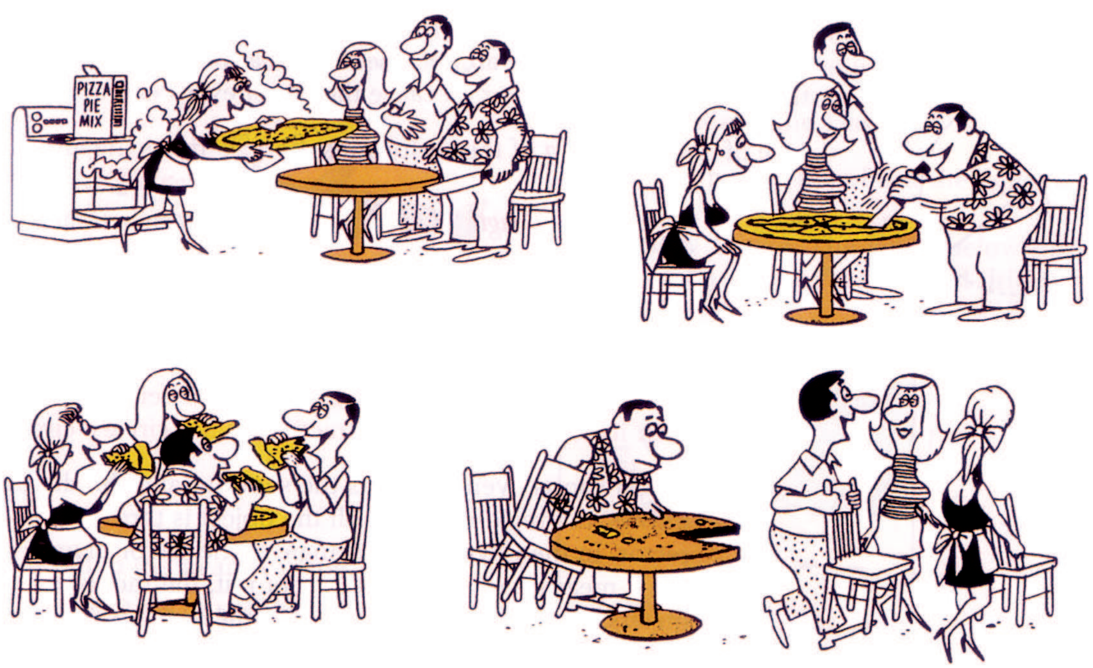
$$\frac{1}{2}(b_n + b_{n+1}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} = c_n;$$

2.

$$\sqrt{c_n \cdot c_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot(n+1)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(n+2)^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\cdot(n+1)(n+2)\right]^2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = b_{n+1}. \text{ Q.E.D.}$$

Sada možemo napisati formulu za opći član niza (a_n) koja glasi:

$$a_n = \begin{cases} \frac{k(k+1)}{2}, & n = 2k-1 \\ \frac{(k+1)^2}{2}, & n = 2k \end{cases}, \ k \in \mathbf{N}.$$



Tom Henderson