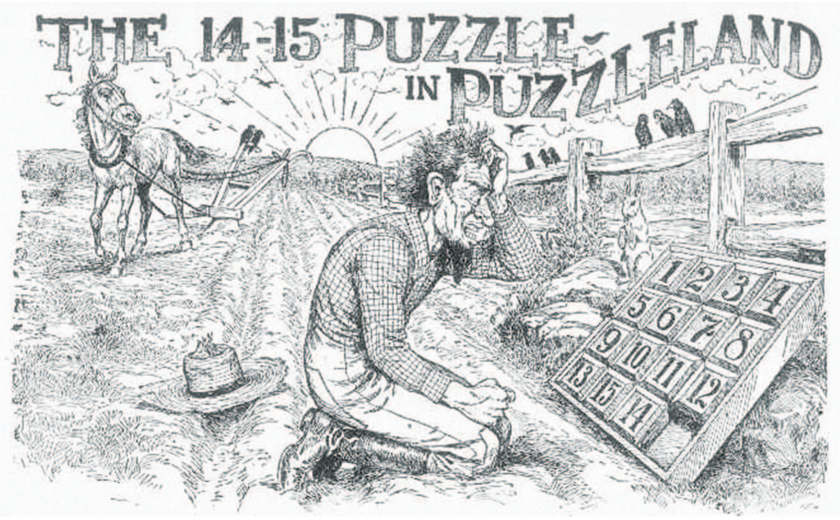
Slagalica petnaest

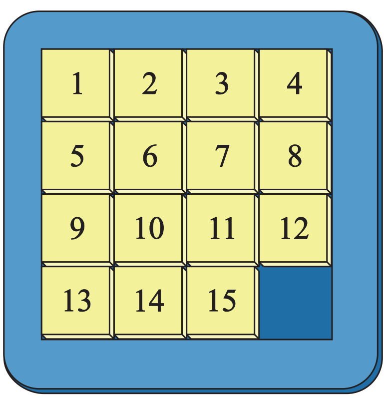


Ela Rac-Marinić-Kragić, Zagreb

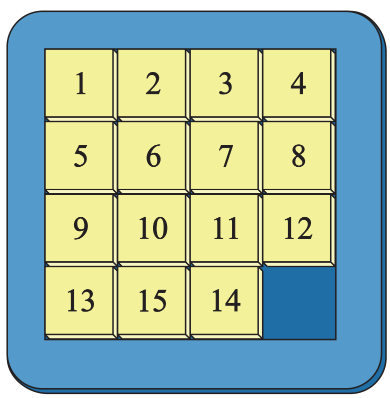
Slagalica petnaest (***Fifteen Puzzle***) je slagalica koja se sastoji od okvira dimenzija 4×4 unutar kojeg je smješteno 16 polja. Na 15 polja su pločice s brojevima od 1 do 15 (jedno polje ostaje prazno) u slučajnom rasporedu. Pločice se pomiču upotrebljavajući prazno polje. Ta se igra može naći i u drugim dimenzijama, pa tako postoji i slagalica 3×3, tzv. **slagalica osam** s 8 pločica. Cilj je slagalice petnaest razmjestiti pločice u poredak prikazan na slici 1.

Postoje položaji koji su rješivi i položaji za koje nema rješenja. Izum ove slagalice obično se pridaje Samu Loydu, iako su nedavna istraživanja pokazala da je on nije izmislio, samo ju je popularizirao. Loyd je prvi obznanio izum te igre i nastavio preuzimati zaslugu za to sve do svoje smrti. Stvarni pronalazač bio je Noyes Chapman, poštanski činovnik u Canastoti, New York, a prijavio se za patent u ožujku 1880.

Ranih 1870-ih godina Sam Loyd nudio je nagradu od čak 1000 dolara onom koji riješi slagalicu (tj.



Slika 1.



Slika 2.

dovede je u položaj sa slike 1) s početnom pozicijom kao na slici 2. Groznica *fifteen fever* zahvatila je cijelu Ameriku, pa je prešla i na Europu. Naravno, nitko nije dobio nagradu jer je ova pozicija nerješiva. Nakon što je publicirana matematička teorija, igra je izašla iz mode. Ipak, mnogi čitatelji sjetit će se sigurno da su u djetinjstvu premetali plastične pločice po okviru kako bi riješili ovu slagalicu.

Matematička teorija slagalice petnaest jednostavna je i lako shvatljiva.

1. Parne i neparne permutacije i zamjene

Kako ima 15 pločica i jedno prazno polje, ukupan je broj mogućih pozicija 16! (16 faktorijela). Polovicu od tih početnih pozicija nemoguće je riješiti, bez obzira koliko poteza se napravi, dok je druga polovica rješiva. Svaki od tih položaja nazivat ćemo **permutacija**. Primjerice permutacija

$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13 \quad (1)$$

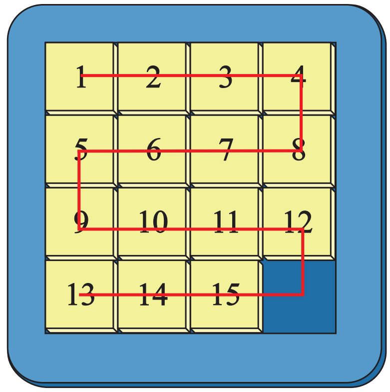
odgovara rasporedu brojeva na slici 1, a permutacija

$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13 \quad (2)$$

odgovara rasporedu na slici 2. Reći ćemo da su u danoj permutaciji brojevi i i j u *obrnutom poretku* ako je $i > j$, a u permutaciji i se nalazi lijevo od j, kao na primjer brojevi 8 i 6 u permutaciji (1). Permutaciju ćemo zvati *parnom* (*neparnom*) ako je u njoj paran (neparan) broj obrnutih poredaka. U permutaciji (1) je devet, a u permutaciji (2) osam obrnutih poredaka, zato je (1) neparna permutacija, a (2) parna.

2. Permutacije i igra 15

Brojeve u permutacijama (permutacija (1)) nižemo po izlomljenoj crti kako je pokazano na slici 3. Pločice

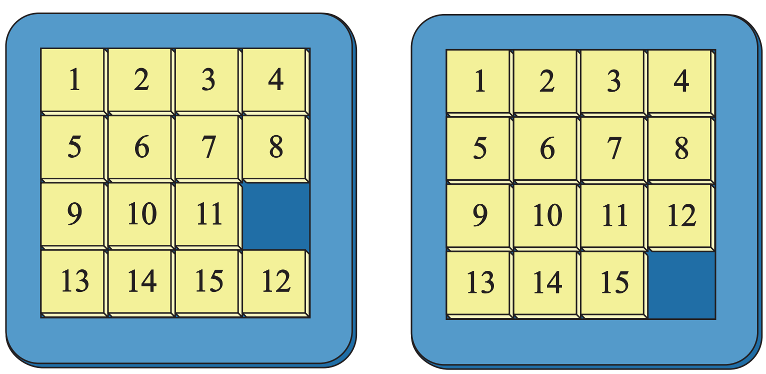


Slika 3.

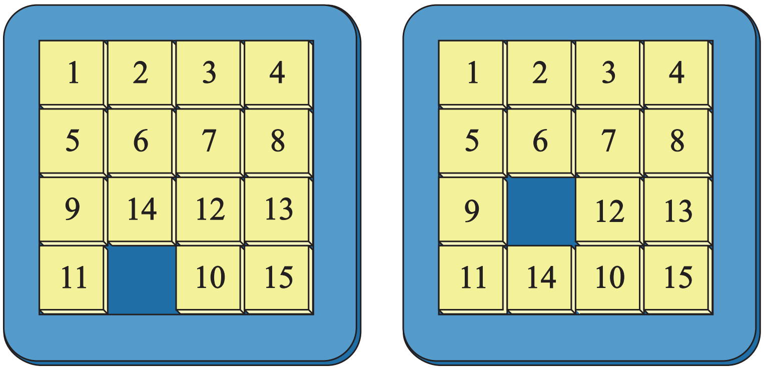
se mogu pomicati horizontalno ili vertikalno upotrebljavajući prazno polje. Ako prelazimo preko praznog polja, u permutaciji ne pišemo nikakav broj. Zato svakoj od ovih permutacija možemo pridružiti 16 različitih položaja pločica, ovisno o položaju praznog polja. Ako pločice pomičemo horizontalno, novi položaj pločica odgovara prethodnoj permutaciji prije pomaka. Ako pločice pomičemo po vertikali, može se dogoditi da se permutacija nije promijenila (kao na slici 4), ali obično novom i starom položaju odgovaraju različite permutacije (kao na slici 5).

Također, nakon pomaka pločice nova permutacija ima jednaku parnost kao i prethodna. Ili su sve parne ili su sve neparne. Lako to provjerimo u slučaju kao na slici 5. Permutacije na slici 5 su

$$\ldots, 9, 14, 12, 13, 15, 10, 11 \qquad (3)$$



Slika 4.



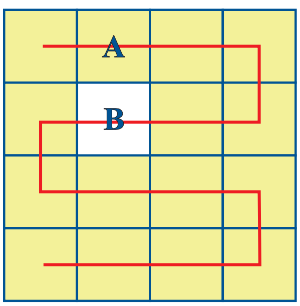
Slika 5.

odnosno

$$\ldots 9, 12, 13, 15, 10, 14, 11. \qquad (4)$$

Pri prelazu iz (3) u (4) jedan obrnuti poredak iščezava $(15, 14)$, ali se zato stvaraju tri nova obrnuta poretka $(14, 12)$, $(14, 13)$, $(14, 10)$.

Općenito, neka pločicu s brojem n, $1 \leq n \leq 15$ s polja A preselimo na prazno polje B (slika 6). Dokaz o jednakoparnosti takvih položaja provodimo na analogan način kao u gornjem primjeru.



Slika 6.

Na dijelu crte između A i B (bez obzira koju poziciju po horizontali zauzima A) nalazi se uvijek paran broj pločica. Neka m od njih imaju broj manji od broja n, a k od njih neka imaju broj veći od broja n. Tada m obrnutih poredaka nakon pomicanja iščezava, a k obrnutih poredaka se stvara. Broj obrnutih poredaka se mijenja za $k - m$, što je paran broj (jer je i $k + m = n$ paran) pa se parnost permutacija nije promijenila. Stara i nova permutacija imaju jednaku parnost.

3. Nerješivost Loydove permutacije

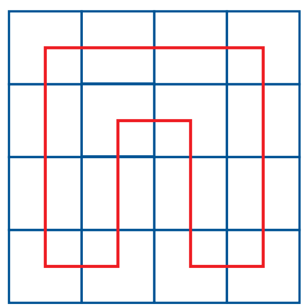
Permutacije na slikama 1 i 2 imaju različitu parnost. To znači da koliko god puta pomicali pločice sa slike 2 (kojoj je pridružena parna permutacija (2)) nećemo postići permutaciju sa slike 1 (kojoj je pridružena neparna permutacija (1)). Iz jednog položaja nikako ne možemo doći do drugog – Loydova glavolomka nerješiva je.

4. Rješivo – nije rješivo

Sada znamo ako položaju pločica odgovara parna permutacija, da glavolomku nećemo moći riješiti. Ali ako su pločice raspoređene prema neparnoj permutaciji, hoćemo li u svakom slučaju moći riješiti glavolomku? Dokazat ćemo da je to moguće za bilo koji poredak pločica kojemu odgovara neparna permutacija.

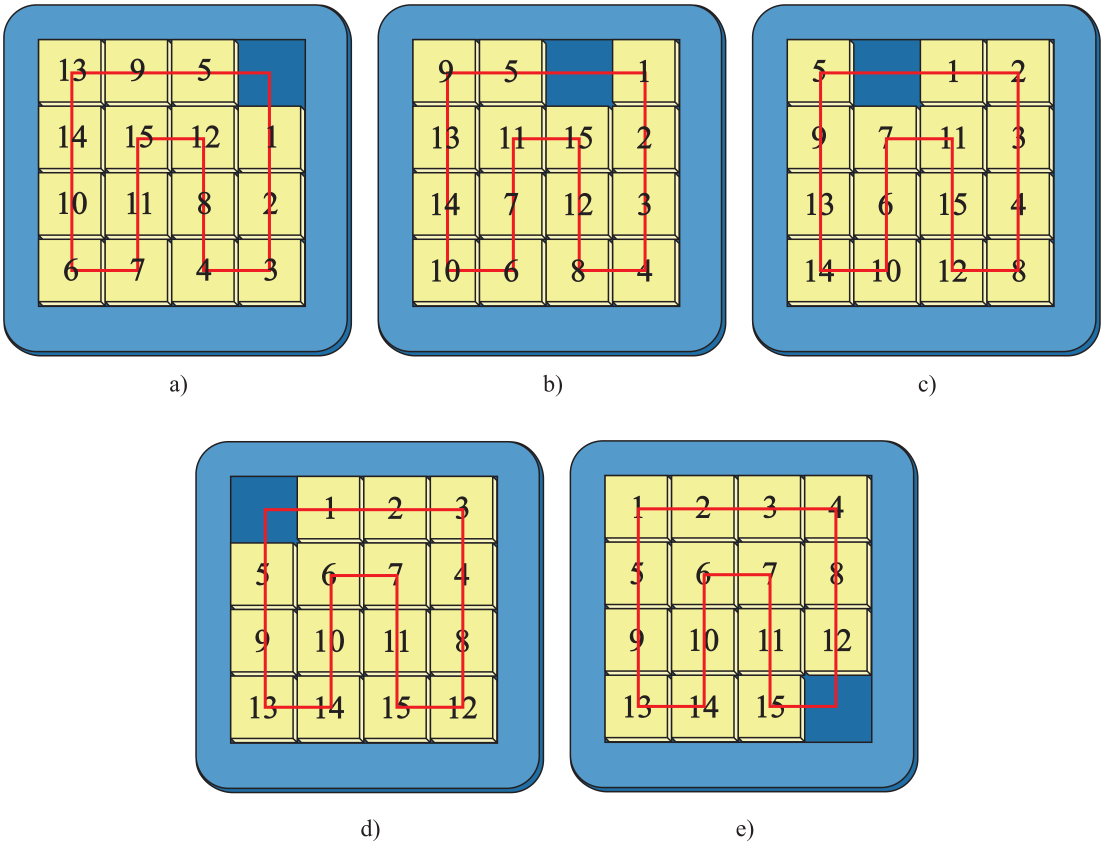
5. Kako preskočiti dva polja

Nacrtajmo na 4×4 pločici put kao na slici 7.



Slika 7.

Duž tog puta, jednu za drugom, možemo pomicati pločice. Tako možemo položaj kao na slici 8 a) postupno prevesti u ciljni "normalni" položaj, kako je i pokazano na slikama 8 b), 8 c), 8 d) i 8 e).

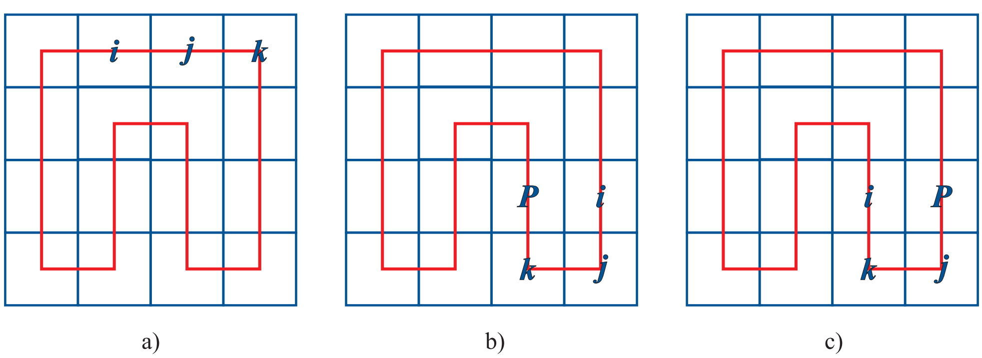


Slika 8.

Uzmimo sada neki drugi položaj pločica i prevedimo ga u “normalni”. Da bismo to ostvarili, trebat ćemo znati izmjenjivati poredak pločica duž označenog puta (put sa slike 7).

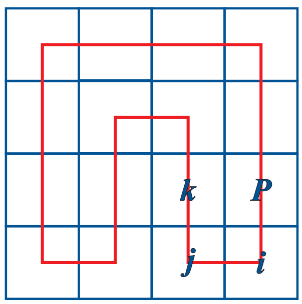
Neka su pločice s brojevima i, j, k raspoređene jedna iza druge duž označenog puta (kao na slici 9 a)). Pomičući sve pločice jednu za drugom lako dobijemo položaj kao na slici 9 b).

Povucimo sada pločicu i na prazno polje. Tako smo iz položaja $(\ldots, i, j, k, \ldots)$ prešli na položaj $(\ldots, j, k, i, \ldots)$. Pločica s brojem i “preskočila” je (u smjeru kazaljke na satu) dvije susjedne pločice



Slika 9.

j i k. Isto tako lako možemo dobiti da bilo koja pločica preskoči dvije susjedne u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Iz položaja kao na slici 9 b) lako dođemo do položaja kao na slici 10 i tada samo pomaknemo pločicu s brojem k na prazno polje.



Slika 10.

Tako smo iz položaja $(\ldots, i, j, k, \ldots)$ prešli u položaj $(\ldots, k, i, j, \ldots)$ – broj k preskočio je dvije pločice suprotno od smjera kazaljke na satu. Na ovaj način bilo koja pločica može preskočiti u bilo kojem smjeru dvije susjedne pločice. Na taj način lako možemo promijeniti bilo koji raspored na jedan od dva krajnja položaja prikazanih na slikama 11 a) i 11 b). Naime, duž označene staze prvo ćemo premještati pločicu s brojem 2 u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu preskačući po dvije pločice do pločice s brojem 1 dok ne zauzme svoj položaj. Ako je između "1" i "2" ostala neka pločica s brojem i, tada ćemo pločicom s brojem i preskočiti dva polja u smjeru kazaljke na satu. Na sličan način ćemo dovesti pločicu s brojem 3 iza pločice s brojem 2 i tako redom dok ne dođemo do pločice s brojem 13. Pomičući pločice duž označenog puta doći ćemo do jednog od dvaju položaja prikazanog na slici 11.

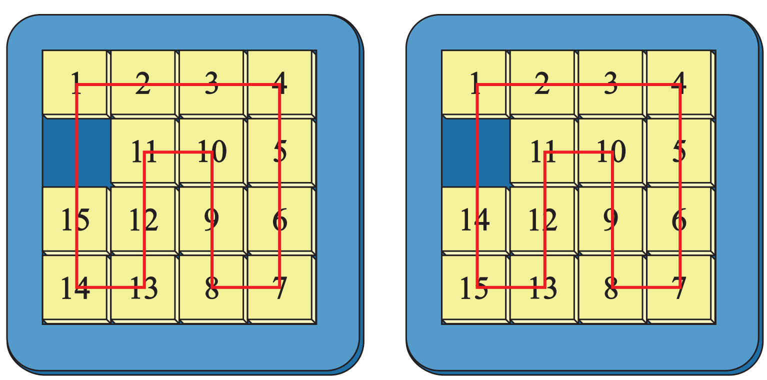
6. "Dobri" i "loši" položaji

Tako smo sve moguće položaje pločica razdvojili u dvije klase. Sve položaje iz prve klase možemo prevesti u položaj kao na slici 11 a), a sve položaje iz druge klase u položaj kao na slici 11 b). Položaju 11 a) odogovara neparna permutacija 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 15, 12, 9, 6, 7, 8, 13, 14 (trinaest obrnutih poredaka), a položaju 11 b) parna permutacija.

Ako neki položaj P možemo prevesti u položaj Q, tada vrijedi i obratno, tj. položaj Q možemo vratiti natrag u položaj P. To znači da sve neparne permutacije, pa tako i "normalnu", možemo prevesti u položaj kao na slici 11 a), ali onda isto tako i taj položaj možemo prebaciti u normalni položaj. Isto vrijedi i za sve parne permutacije. Normalni položaj (slika 1) dakle spada u prvu klasu, a položaj na slici 2 spada u drugu klasu. Položaje prve klase nazvat ćemo **"dobrima"** jer iz njih dobivamo rješenje (položaj na slici 1) slagalice 15, a položaje iz druge klase nazvat ćemo **"lošima"** jer iz njih ne možemo postići rješenje slagalice 15. Ovime smo dokazali da su sve neparne permutacije, tj. dobri položaji rješivi.

O ovoj slagalici mnogo je pisano. I danas se mnogi vole igrati tom slagalicom. Na internetu možete naći mnoštvo slagalica 15 s kojima se možete zabavljati. No nisu sve od njih samo s "dobrim" položajima, ima ih i s "lošima". Ukucajte u Google *Fifteen Puzzle* i uživajte. Preporučujem slagalicu na stranici

`http://www.javaonthebrain.com/java/puzz15/.`



a) b)

Slika 11.