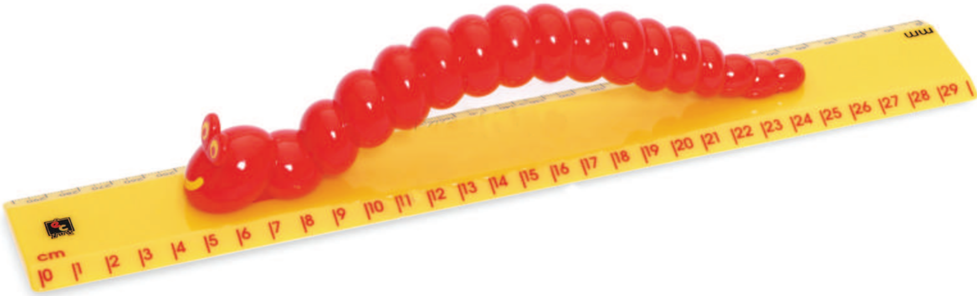
Uvod u linearne funkcije

Željko Brčić, Vinkovci



Jedan od složenijih sadržaja u nastavnom gradivu osnovnoškolske matematike jest **linearna funkcija**. Uvodi se velik broj novih pojmova koje treba svladati (argument i vrijednost funkcije, nezavisna i zavisna varijabla, parametri ili koeficijenti, odsječak na osi y, nultočka, rast i pad funkcije), a njihova apstraktnost za dio učenika te dobi (13–14 godina) jednostavno je nepremostiva prepreka. Jedan od načina približavanje tog gradiva učenicima sedmog razreda osnovne škole prikazan je u ovome tekstu.

Sama ideja nastala je na državnom seminaru iz matematike u Primoštenu, gdje su, između ostalog, predstavljeni i rezultati PISA-testiranja. Opći dojam bio je da rezultati hrvatskih ispitanika nisu na očekivanoj razini ponajprije zbog drugačijeg načina formuliranja pitanja u odnosu na uobičajeni način sastavljanja pismenih ispita u našim školama. Pitanja u PISA-testu stavljena su u u kontekst izvjesnih realnih situacija pa umjesto da se provjerava formalno znanje, zapravo se provjerava koliko su učenici osposobljeni stečena znanja primijeniti u stvarnoj životnoj situaciji. Moja je želja bila upravo to: smjestiti linearne funkcije u stvarni životni kontekst, i to odmah u uvodnom satu, a ne samo kao usputnu ilustraciju (kako je to učinjeno u većini osnovnoškolskih udžbenika). Time se učenicima omogućuje da lakše shvate pravi smisao linearne funkcije, a ne da se – što je čest slučaj – obrada svede na puko računanje koordinata točaka i njihovo ucrtavanje u koordinatnom sustavu te crtanje grafa funkcije.

Cilj nastavne teme (obrađene u jednome blok-satu) je uvesti pojam linearne funkcije promatranjem odnosa dviju međusobno povezanih veličina na primjerima iz svakodnevnog života. Za razliku od svih meni dostupnih udžbenika u kojima se odmah na prvoj stranici učenicima daje formula $f(x) = ax + b$, na mom satu učenici najprije kroz konkretne primjere sami uočavaju ovisnost jedne veličine o drugoj, a do spomenute formule dolaze tek pri kraju drugoga sata. Pritom je sačuvan princip "od konkretnog ka općem", što bi u osnovnoškolskoj matematici trebalo biti pravilo. Izvlačeći opće činjenice iz niza konkretnih primjera, učenici poboljšavaju svoje logičko mišljenje i zaključivanje, uče povezivati poznate i nove pojmove, te razvijaju sposobnost oblikovanja stvarnosti. Usto, ovakav način rada potiče motivaciju za stjecajem novih spoznaja, razvija radoznalost, ustrajnost i samostalnost u radu, kao i suradnju s kolegama.

Glavni dio sata počinje prvim primjerom koji učenici obrađuju u otvorenom razgovoru s nastavnikom i drugim učenicima, dajući svoje prijedloge i načine rješavanja pojedinih zadataka, obrazlažući može li se primijeniti neki drugi postupak, sukobljavajući svoje razmišljanje s iskazima ostalih učenika, nadopunjujući neka tuđa objašnjenja i slično. Sama izvedba sata mnogo je ugodnija ako u razredu imate računalo s projektorom i materijal pripremljen u obliku *PowerPoint* prezentacije, no temu je moguće obraditi i bez toga (koristeći se papirnatim listićima, prozirnicama i sl.). U nastavku teksta, u sažetom obliku, prikazan je tijek oba nastavna sata.

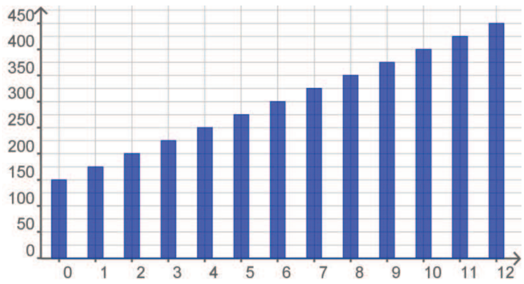
Primjer 1. Josip je za svoj rođendan od roditelja dobio 150 kuna, a djed mu je obećao svakoga mjeseca od mirovine darivati po 25 kuna. Što možete zaključiti o iznosu Josipova novca?

Kroz navedeni motivacijski zadatak učenici na vrlo prirodan način shvate pojam ovisnosti dviju veličina: iznos Josipova novca ovisi o tome koliko je mjeseci proteklo od njegova rođendana. Djed mu svakoga mjeseca daje novih 25 kuna, pa iznos novca nakon, primjerice 3 mjeseca nikako ne može biti isti kao nakon 9 mjeseci. Točnije, što je proteklo više vremena, iznos novca bit će sve veći.

Slijedi računanje nekih konkretnih iznosa. Nakon mjesec dana Josip će imati $150 + 25 = 175$ kuna. Nakon dva mjeseca imat će još 25 kn više, dakle 200 kuna. Nakon 3 mjeseca 225 kuna itd. Kada učenici shvate da se svaki sljedeći iznos lako izračuna dodavanjem novih 25 djedovih kuna, preskočimo nekoliko mjeseci i zapitamo: Koliko će Josip imati novca nakon, primjerice 8 mjeseci? Neki će učenici nastaviti dodavati 25 kuna dok ne dođu do osmog mjeseca, no većina će taj zadatak riješiti množenjem: $25\,\text{kn} \cdot 8 + 150\,\text{kn} = 350\,\text{kn}$. Ovaj nam račun kazuje da smo osam mjeseci od djeda dobivali po 25 kuna, a od roditelja jednokratno 150 kuna. Nakon što nađemo rezultat za još nekoliko mjeseci, dobivene podatke prikažemo u tablici:

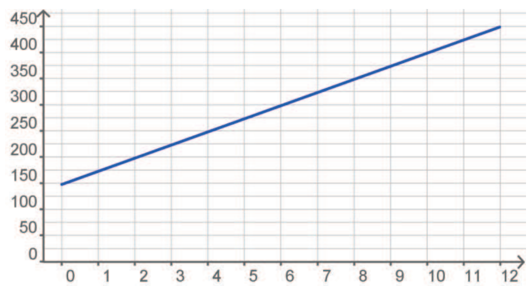
Broj proteklih mjeseci	0	1	2	3	4	6	8	12
Iznos Josipova novca (kn)	150	175	200	225	250	300	350	450

Učenici sedmih razreda u prvom su polugodištu obradili nastavnu temu Analiza i prikaz podataka, pa će lako shvatiti stupčasti dijagram koji prikazuje podatke iz tablice.



Slika 1.

Pri analizi tog dijagrama treba obratiti pozornost na visine stupaca: svaki je stupac viši od prethodnog i to uvijek za isti iznos (25 kn). Nakon što stupčasti dijagram zamijenimo točkastim, učenici će uočiti da sve točke pripadaju jednom pravcu.



Slika 2.

Sljedeći zadatak koji učenici trebaju savladati jest doći do opće formule za računanje iznosa Josipova novca. Tu nam može pomoći sažeti prikaz ranijeg računanja:

1. mjesec $25 \cdot 1 + 150 = 175$
2. mjesec $25 \cdot 2 + 150 = 200$
3. mjesec $25 \cdot 3 + 150 = 225$
4. mjesec $25 \cdot 4 + 150 = 250$
6. mjesec $25 \cdot 6 + 150 = 300$
8. mjesec $25 \cdot 8 + 150 = 350$
12. mjesec $25 \cdot 12 + 150 = 450$

Učenici lako uočavaju da iznos ovisi o broju mjeseci, da su brojevi 25 i 150 unaprijed zadane konstante. Sam račun riječima se može iskazati ovako:

Iznos Josipova novca dobijemo tako da 25 kn pomnožimo s brojem mjeseci i dodamo 150 kn. Slijedi zapis ove rečenice u matematičkoj formi. Varijabli pridijelimo neku oznaku, primjerice m (broj mjeseci), a vrijednost funkcije neka je n pa možemo zapisati:

$$n(m) = 25m + 150.$$

U nastavku učenici uvježbavaju uporabu dobivene formule, no to ne rade bez razumijevanja, nego formulu povezuju s kontekstom zadatka. Ako primjerice treba izračunati koliko će novca Josip imati nakon 15 mjeseci, učenici će shvatiti da im je $m = 15$, a da će rezultat dobiti tako da 15 uvrste u linearnu funkciju: $n(15) = 25 \cdot 15 + 150 = 375 + 150 = 525$. Jasna im je i interpretacija samog rezultata: $n(15) = 525$, znači da će nakon 15 mjeseci Josip imati 525 kuna.

Razumijevanje linearne funkcije, točnije razlikovanje nezavisne i zavisne varijable, dodatno produbljujemo potpitanjem: "Nakon koliko mjeseci će Josip od dobivenog novca moći kupiti bicikl koji stoji 550 kuna?" U raspravi se lako zaključi da sada nije dobro računati $n(550)$, jer bi to bio iznos novca nakon 550 mjeseci. Nas naravno zanima koliki mora biti m (broj mjeseci) da bi $n(m)$ (iznos novca) bio 550 kuna. Ovakvo razmišljanje učenike dovodi do linearne jednadžbe $25m + 150 = 550$, čije je rješenje $m = 16$. Nakon provjere da je zaista $n(16) = 550$, učenici zaključuju da će Josip moći kupiti bicikl nakon 16 mjeseci.

Nakon vrlo detaljne i relativno duge (20–25 minuta) obrade prvog primjera, slijedi drugi zadatak.

Primjer 2. Majstor Jure je vodoinstalater koji ima ovakav cjenik: dolazak u stan stoji 50 kuna, a svaki sat rada dodatno se naplaćuje 30 kuna.

Zadaća je: analizirati tekst i pronaći sličnosti i razlike s prethodnim primjerom. Zatim treba napisati kako glasi linearna funkcija prema kojoj majstor Jure računa svoju zaradu i riješiti dva konkretna zadatka: "Koliko će zaraditi za 5 sati rada?" te: "Koliko je sati radio ako mu je za to plaćeno 230 kuna?"

Za razliku od prvog primjera koji je obrađen u zajedničkom razgovoru učitelja i cijelog razreda, drugi primjer učenici proučavaju u parovima. Kroz međusobni dijalog učenici vrlo lako uspostave vezu između dvaju navedenih primjera. Roditeljski novac zamjenjuje Jurina naknada za dolazak u stan, djedov novac sada postaje majstorova satnica, a umjesto broja mjeseci, varijabla postaje broj sati rada... Nakon što sve to shvate, zapisivanje linearne funkcije i rješavanje postavljenih zadataka postaje vrlo jednostavno.

Usvajanje pojma linearne funkcije produbljuje se na drugom satu i to kroz grupni rad. Učenici se podijele u četiri jednakobrojne grupe i rješavaju (svaka grupa različite) radne listiće na kojima su opisani novi primjeri linearnih funkcija.

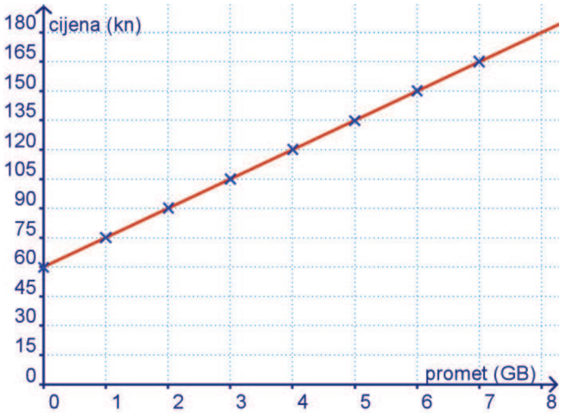
Primjer 3. Na benzinsku crpku stigla je puna cisterna benzina. Iz nje se, brzinom od 6 hektolitara u minuti, istače gorivo u tank u kojem je već bilo 80 hektolitara benzina. Zapišite linearnu funkciju koja opisuje količinu goriva u tanku nakon x minuta. Koliko je hektolitara goriva bilo u tanku pola sata od početka pražnjenja cisterne? Nakon koliko vremena je u tanku bilo 350 hl benzina?

Primjer 4. Računi za vodu sastoje se od dva dijela: prvi je fiksni dio koji plaćaju svi potrošači bez obzira na količinu potrošene vode, a drugi dio ovisi o količini potrošene vode u m^3. U tablici je dan cjenik za mjesečnu potrošnju do 8 m^3, koji u sebi sadržava i fiksnu naknadu i potrošnju vode.

m^3	0	1	2	3	4	5	6	7	8
kn	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Iz tablice odredi koliko iznosi fiksni dio vodne usluge, te koliko plaća korisnik za svaki potrošeni "kubik" vode. Kako glasi linearna funkcija kojom se računa cijena vode ovisno o broju potrošenih kubičnih metara? Koliko iznosi račun kućanstva koje je potrošilo 16 m^3? Koliko je vode potrošila obitelj čiji je račun iznosio 127 kuna?

Primjer 5. Cjenik telefonske kompanije koja uporabu interneta naplaćuje tako da na fiksni iznos mjesečne pretplate doda iznos koji ovisi o količini internetskog prometa u gigabajtima, prikazan je grafikonom.



Slika 3.

Iz grafikona odredi kolika je mjesečna pretplata, te koliko korisnik plaća za svaki potrošeni gigabajt? Kako glasi linearna funkcija kojom se računa cijena uporabe interneta ovisno o broju potrošenih GB? Koliko iznosi račun korisnika čiji je promet 16 GB? Koliko je gigabajta potrošeno u računu od 255 kuna?

Primjer 6. U gradu postoje dvije tvrtke koje nude usluge taksi prijevoza. Taksi služba *Ford* svoje usluge naplaćuje prema cjeniku: start 12 kn, a cijena po prijeđenom kilometru 9 kn. Konkurentska tvrtka *Audi* polazak sa stajališta naplaćuje 25 kn, a svaki prijeđeni kilometar 8 kn. Napiši formule prema kojima se računa cijena prijevoza ovisno o broju prijeđenih kilometara (za obje tvrtke). Koliko će stajati vožnja od 8 km u jednoj, odnosnoj drugoj tvrtki? Koliki je put prešla osoba koja je u *Fordu* platila 138 kn? Koliko bi taj isti put platila u *Audiju*?

Nakon desetak minuta rada u grupi, nakon što svi završe svoj posao, predstavnici grupa u petominutnom izlaganju redom upoznaju ostale učenike sa svojim zadatkom, načinom rada i samim rezultatima.

Na samom kraju sata ostaje još vremena za usustavljanje naučenog o linearnim funkcijama, odnosno isticanje bitnih karakteristika koje svaka linearna funkcija ima. Nakon što ispišu svih šest funkcija iz ranijih primjera, učenici zaključuju da svaka linearna funkcija ima oblik $f(x) = ax + b$, pri čemu su a i b neki konstantni brojevi koje zovemo parametri ili koeficijenti. Dalje, za "ikseve" uzimamo proizvoljne brojeve (x je nezavisna varijabla) te pomoću dobivene formule računamo $f(x)$. Dobiveni broj zovemo vrijednost funkcije f za argument x i on očito ovisi o izboru broja x.

Na idućim satima matematike učenici će se, naravno, upoznati i s linearnim funkcijama za koje ponekad nije moguće pronaći primjer u stvarnosti (negativni koeficijenti, razlomci i slično), no nakon što shvate pojam linearne funkcije na konkretnim primjerima, svakako će im biti lakše raditi i s takvim, apstraktnim funkcijama.

Učinkovitost ovakvog pristupa poučavanju linearnih funkcija u osnovnoj školi teško je precizno utvrditi nakon samo jedne (prošlogodišnje) primjene u dva sedma razreda. No, usporedba s ranijim generacijama, koje su to gradivo obrađivale na standardni način, pokazuje da je zainteresiranost učenika za rad na satu sada puno veća. Umjesto, priznat ćete, suhoparnog teoretiziranja o linearnim funkcijama i njihovim svojstvima, učenici su dobili prigodu rješavati neke njima razumljive probleme. Time učenje linearnih funkcija prestaje biti samo sebi svrha, te postaje alat koji omogućuje brže i učinkovitije rješavanje nekih zadataka.