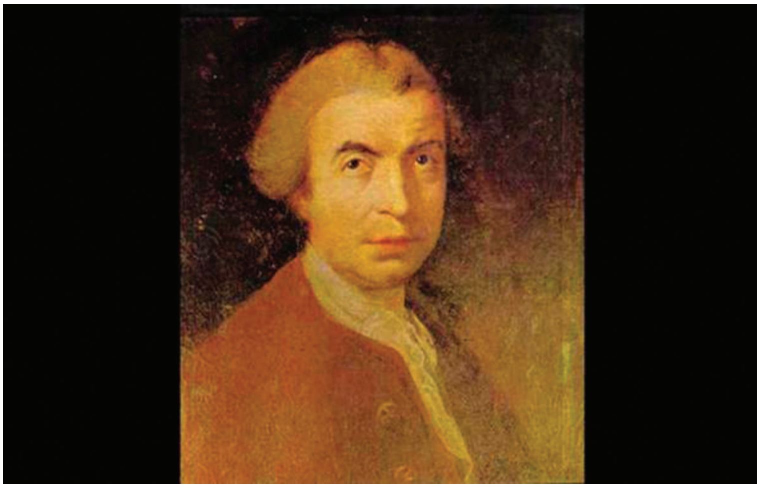
Školski projekt
Josip Ruđer Bošković



Blanka Iličić, Bjelovar

Prošle školske godine Gimnazija Bjelovar, u suradnji s gimnazijama iz Nove Gradiške i Požege, posvetila je u većini predmeta neke nastavne sadržaje sjećanju na Josipa Ruđera Boškovića.

Teme i sadržaji nisu bili unaprijed dogovoreni, već je svaki od zainteresiranih nastavnika mogao izabrati što će raditi i nakon toga dogovoriti moguću suradnju. Sva predavanja i radionice održani su u Bjelovaru za zainteresirane učenike svih triju gimnazija. Naravno, sve to nije moglo proteći bez matematike. Razmišljajući što bi se moglo ponuditi učenicima, a da ipak barem djelomično bude povezano s planom i programom, odlučila sam se za dvosatnu radionicu zamišljenu kao ponavljanje krivulja drugog reda pod nazivom "Konike".

S obzirom na to da su u trećim razredima već bile obrađene krivulje drugog reda, elipsa, hiperbola i parabola, podijelivši učenike u skupine, započela sam sa zadatkom:

ZADATAK: Definirajte elipsu, hiperbolu i parabolu.

Naravno, svi su znali osnovne definicije te su elipsu i hiperbolu definirali kao skupove točaka ravnine kojima je zbroj udaljenosti, odnosno apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju zadanih točaka uvijek jednaka, a parabolu kao skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca i jedne čvrste točke te ravnine koja ne pripada tom pravcu.

Raspravljajući kratko o tim definicijama, uočili smo da se pri definiranju elipse i hiperbole koristimo povezanošću točaka krivulje s neke dvije točke, dok je kod parabole ta povezanost s pravcem i točkom.

Mogu li se te definicije nekako ujednačiti? Postoji li način da definiramo sve tri krivulje, ili u nekom odnosu s dvije točke, ili s pravcem i točkom?

Tu, naravno, započinjemo s temom koja je povezana s Boškovićevim radom. Ukratko se može spomenuti nekoliko podataka iz povijesnog razvoja:

Krivulje drugog reda ponekad se nazivaju konikama ili konusnim presjecima jer se mogu dobiti presijecanjem stožaste ili konusne plohe ravninom. Pronalazak konika datira još od 4. st. pr. Kr. Sva saznanja o njima, kako svoja tako i svojih prethodnika, objedinio je Papo iz Aleksandrije (290. – 350.) u djelu *Colection*. Upravo je te spoznaje Ruđer Bošković iskoristio u svom radu. U djelu *Sectionum conicarum elementa* (Rim, 1764.), Bošković izgrađuje teoriju konika na čisto geometrijski način. Proučavajući omjer udaljenosti točke krivulje od jedne čvrste točke ravnine, fokusa i čvrstog pravca koji ne prolazi tim fokusom, zaključio je sljedeće:

Papo–Boškovićev teorem: *Neka je $\varepsilon > 0$ realan broj, F točka ravnine M i ρ pravac u ravnini M koji ne prolazi točkom F. Tada je skup*

$$G = \left\{ T \in M : \frac{d(F,T)}{d(\rho,T)} = \varepsilon \right\}$$

krivulja drugog reda i to:
elipsa ako je $\varepsilon < 1$,
parabola ako je $\varepsilon = 1$ i
hiperbola ako je $\varepsilon > 1$.

ZADATAK: Provjerite je li riječ o krivulji drugog reda.

Uz malu pripomoć učenici mogu doći do vršne jednadžbe krivulje i potvrditi da je uistinu riječ o krivulji drugoga reda.

Ako je direktrisa krivulje pravac $\rho \ldots x = -\frac{p}{2}$ i fokus $F\left(\varepsilon \cdot \frac{p}{2}, 0\right)$, tada je

$$d(F,T) = \sqrt{\left(x - \varepsilon \cdot \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

i

$$d(\rho,T) = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$

Boškovićeva definicija:

$$\sqrt{\left(x - \varepsilon \cdot \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right| \qquad /^2$$

$$x^2 - \varepsilon p x + \frac{\varepsilon^2 p^2}{4} + y^2 = \varepsilon^2 \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4} \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^2 = p\varepsilon(1+\varepsilon)x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

. . . *vršna jednadžba krivulje*

ZADATAK: Odredite jednadžbu i skicirajte graf krivulje drugog reda koja je određena fokusom $F(3,0)$ i direktrisom $y = x$ ako je numerički ekscentricitet:
1) $\varepsilon = 0.5$ 2) $\varepsilon = 1$ 3) $\varepsilon = 2$.

Svaka od skupina rješava jedan od zadataka i po završetku uz izrađeni plakat prezentira ostalima svoja rješenja i načine kako se do njih došlo.

Učenicima se može na kraju za domaću zadaću zadati da, ako je $T_0(x_0, y_0)$ točka krivulje i $p_0 = \frac{1}{2} p\varepsilon(1+\varepsilon)$, nacrtaju pravokutnik s vrhovima $Q_1(0, -p_0)$, $Q_2(x_0, -p_0)$, $Q_3(x_0, p_0)$, $Q_4(0, p_0)$ i kvadrat sa stranicom y_0 te izračunaju i usporede površinu kvadrata (y_0^2) s površinom pravokutnika $(2p_0x_0)$.

Na sljedećem je satu moguće provjeriti imaju li odnosi tih površina veze s izvornim nazivima krivulja, hiperbola – suvišak, parabola – jednakost, elipsa – nedostatak, koje je uveo Apolonije iz Perge (262. – 190.), a kojima se koristimo i danas.

LITERATURA

1/ B. Dakić, N. Elezović: *Analitička geometrija*, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovne gimnazije, Element, 1998.

2/ S. Kurepa, L. Neralić: *Udžbenik i zbirka zadataka Matematika 3*, Školska knjiga, 2000.

3/ Internetske stranice, Wikipedija, ožujak 2011.