Nizovi

4. dio: Neke primjene Fibonaccijeva niza

Anđelko Marić, Sinj

Niz (f_n) zadan rekurzivnom relacijom $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbf{N}, f_1 = a, f_2 = b$; $ab \in \mathbf{N}$ zove se *Fibonaccijev*[1] *niz*. Karakteristična jednadžba Fibonaccijeva niza glasi $x^2 - x - 1 = 0$. Rješenja te jednadžbe su brojevi $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\lambda}$ te je izraz za opći član Fibonaccijeva niza:

$$f_n = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n; \ AB \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Mi ćemo se, u ovom članku, baviti isključivo Fibonaccijevim nizom s početnim članovima $f_1 = f_2 = 1$, tj. s nizom $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ te će nam u daljnjem tekstu (f_n) označavati upravo taj niz.

Stavljajući u (1) $f_1 = 1, f_2 = 1$, dobijemo:

$$A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = 1;$$
$$A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^2 = 1.$$

Rješenje ovog sustava je $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ te je opći član niza $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ dan izrazom:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]. \tag{2}$$

Više o Fibonaccijevu nizu čitatelj može naći, na primjer, u knjizi Darka Veljana *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Za čitanje daljnjeg teksta dovoljno je najelementarnije srednjoškolsko znanje, te tekst mogu pratiti i učenici nižih razreda srednje škole. Doduše, pojavljuje se na jednom mjestu izračunavanje granične vrijednosti niza a_n, što mlađi učenici možda neće razumjeti, ali taj dio nije nužno bitan za razumijevanje daljnjeg teksta.

Definirajmo sada niz $a : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ ovako: $a_n = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$, gdje su f_{2n-1} i f_{2n} članovi Fibonaccijeva niza (2). Zapišimo nekoliko članova niza a_n: $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \frac{89}{144}, \ldots$

Budući da je

$$\begin{aligned}
\lim a_n &= \lim \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}} \\
&= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n-1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n-1}\Big]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n}\Big]} \\
&= \lim \frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n-1} \cdot \Big[1 - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^{2n-1}\Big]}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n} \cdot \Big[1 - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^{2n}\Big]} \\
&= \Big(\text{jer je } \Big|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big| < 1\Big) = \frac{2}{1+\sqrt{5}},
\end{aligned}$$

to je niz a_n konvergentan. Graničnu vrijednost niza a_n označimo s μ: $\mu = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Zapažamo da je $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Brojevi μ i λ zadovoljavaju još jednu jednostavnu relaciju $\lambda - \mu = 1$.

Zaista, $\lambda - \mu = \lambda - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} =$ (jer je λ rješenje jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$) $= 1$. Broj $\mu(\lambda)$ je jedini pozitivni broj koji uvećan (uma-

[1] Leonardo iz Pise, zvan Fibonacci (skraćeno od Filius Bonaccii), talijanski matematičar (oko 1170. do 1250. g.).

njen) za 1 daje svoju recipročnu vrijednost, što se vrlo lako provjeri.

Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ duljine $|AB| = a$ i njezina točka T, $|AT| = x$. Ako za brojeve a i x vrijedi relacija $a : x = x : (a - x)$ (tj. ako se duljina čitave dužine naprama duljini njezina većeg dijela odnosi kao duljina većeg dijela naprama duljini manjeg dijela), kažemo da točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru, odnosno da točka T čini na dužini $\overline{AB}$ zlatni rez (*sectio aurea*) (slika 1).

Slika 1.

Izračunajmo vrijednost zlatnog omjera $x : (a - x)$:

$$
\begin{aligned}
a : x = x : (a - x) &\implies x^2 = a^2 - ax \\
&\implies x^2 + ax - a^2 = 0 \\
&\implies x = \frac{1}{2}(-a \pm a\sqrt{5}) \\
&= (\text{zbog } \ x > 0) = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Imamo dalje:

$$
\begin{aligned}
x : (a - x) = a : x &= \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\
&= \lambda = \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}
$$

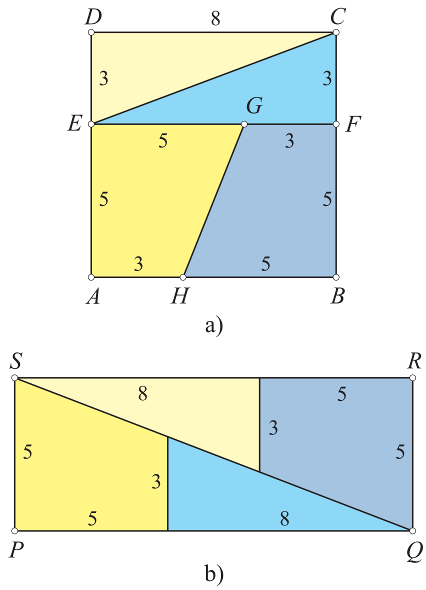
Vidimo da je vrijednost zlatnog omjera jednaka recipročnoj vrijednosti granične vrijednosti niza a_n.

Zlatni rez poznavali su već stari Grci, što se vidi iz raznih arhitektonskih rješenja na hramu Partenon na Akropoli.

Najslavniji grčki arhitekt i kipar Fidija u mnogim se svojim djelima koristio omjerom zlatnog reza. Sam naziv *sectio aurea* upotrebljava se od 19. stoljeća. U srednjem vijeku i u razdoblju renesanse, matematičari su bili toliko zaokupljeni tim omjerom da je bio prozvan božanskim omjerom (*divina proportio*). Renesansni matematičar fra Luca Pacioli, OFM, izdao je 1509. g. knjigu *De divina proportione* (*O božanskom omjeru*) koju je ilustrirao Leonardo da Vinci.

Nizovi (f_n) i (a_n) u uskoj su vezi s tzv. geometrijskim paradoksom, u kojem se kvadrat dijeli na dijelove od kojih se sastavlja pravokutnik, veće ili manje ploštine od ploštine kvadrata.

Kvadrat stranice $a = 8$ podijelimo kao na slici 2a) na dva pravokutna trokuta i dva pravokutna trapeza od kojih sastavimo pravokutnik kao na slici 2b).

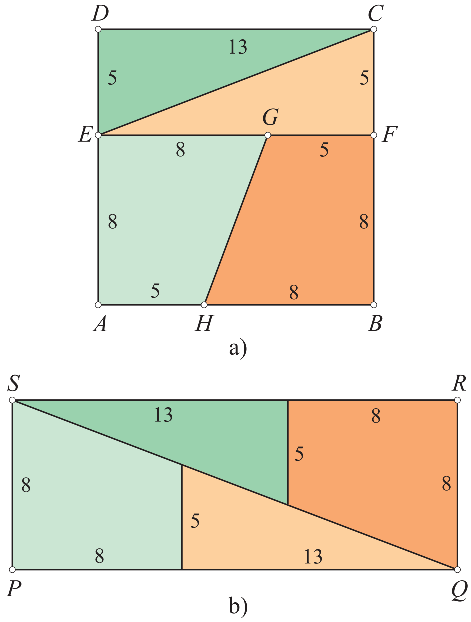


Slika 2.

Međutim, ploština kvadrata je $P_{ABCD} = 8^2 = 64$, a ploština pravokutnika $P_{PQRS} = (5 + 8) \cdot 5 = 65$.

Isto je tako ploština kvadrata na slici 3a) jednaka $13^2 = 169$, a ploština pravokutnika na slici 3b) složenog od dijelova tog kvadrata jednaka $(8 + 13) \cdot 8 = 168$.

Gdje je pogreška? Ona se krije u tome što duljina dijagonale $\overline{QS}$ pravokutnika $PQRS$ sastavljenog od dijelova kvadrata $ABCD$ nije jednaka zbroju duljina dužina $\overline{EC}$ i $\overline{HG}$, jer bi u slučaju jednakosti vrijedio



Slika 3.

omjer $3 : 8 = 5 : 13$ koji nije točan, kao što nije točan ni omjer $5 : 13 = 8 : 21$.

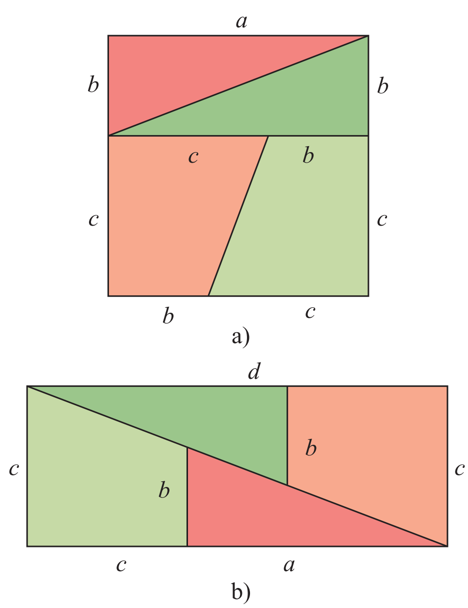
Uočimo dvije stvari. Prvo, ploština složenog pravokutnika je u prvom slučaju za 1 veća, a u drugom slučaju za 1 manja od ploštine polaznog kvadrata. I drugo, duljine svih dužina koje se pojavljuju uzastopni su članovi Fibonaccijeva niza. Postavlja se pitanje, može li se kvadrat duljine stranice a, $a \in \mathbf{N}$ podijeliti dužinama kao na slici 4a), da se od njega može složiti pravokutnik kao na slici 4b), pri čemu su $b,\ c \in \mathbf{N}$.

Duljine dužina koje se pojavljuju, poredajmo po veličini: b, c, a, d. Budući da je: $a = b+c$, $d = c+a$, može se staviti $b = f_n$, $c = f_{n+1}$, $a = f_{n+2}$, $d = f_{n+3}$, gdje su $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}$ uzastopni članovi Fibonaccijeva niza (općenito, ne nužno s početnim članovima $f_1 = f_2 = 1$).

Da bi se od zadanog kvadrata mogao složiti pravokutnik na način kao na slikama 4a) i 4b) mora vrijediti: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{d}{c}$, odnosno:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+2}}{f_n} = \frac{f_{n+3}}{f_{n+1}} &\iff \frac{f_n + f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+1} + f_{n+2}}{f_{n+1}} \\
&\iff 1 + \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \\
&\iff \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}} \\
&\iff \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n}{f_{n+1}} + 1.
\end{aligned}$$

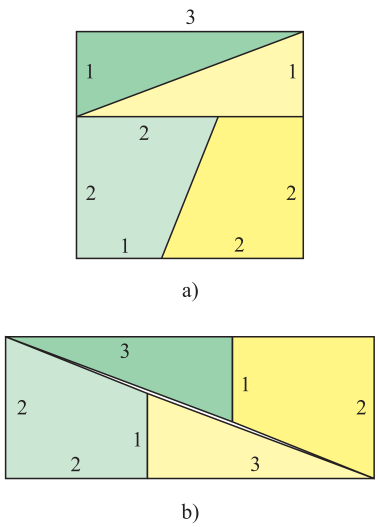
Stavljajući $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = x$, posljednja jednakost prelazi u $x = \dfrac{1}{x} + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbf{Q}$. S druge je pak strane $f_n, f_{n+1} \in \mathbf{N} \implies \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = x \in \mathbf{Q}$, što je kontradikcija. Zaključak: kvadrat se ne može pretvoriti u pravokutnik na zadani način, tj. da je stranica kvadrata $a = b + c$, a stranica pravokutnika $a + c$, c; $a,\ b,\ c \in \mathbf{N}$. To je moguće, kako smo vidjeli, samo ako se stranica kvadrata duljine a podijeli u omjeru $\dfrac{c}{b} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, tj. u omjeru zlatnog reza.



Slika 4.

Zapazimo, također, da dijelovi kvadrata to bolje pokrivaju pravokutnik koji je složen od tih dijelova ako je stranica kvadrata $a = f_k$ sa što većim indeksom k, $k \in \mathbf{N}$.

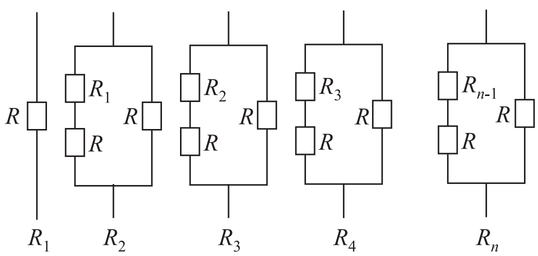
Na slikama 5a) i 5b) gdje je stranica kvadrata $a = 3 = b + c = 1 + 2$, a stranice pravokutnika $c + a = 5$, $c = 2$, lijepo se vidi da dijelovi kvadrata ne pokrivaju cijeli pravokutnik.



Slika 5.

Navedimo još jedan primjer, sada iz fizike, u kojem se pojavljuju članovi niza (f_n), odnosno (a_n).

Definirajmo niz otpora R_n $(n \in \mathbf{N})$ pomoću zadanog otpora R ovako: $R_1 = R$, R_n za $n > 1$, pomoću sheme na slici 6.



Slika 6.

Izrazimo vrijednost otpora R_n u funkciji R i n $(n \in \mathbf{N})$:

$$\begin{aligned}
R_1 &= R\\
\frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1+R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R} \implies R_2 = \frac{2}{3}R\\
\frac{1}{R_3} &= \frac{1}{R_2+R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{2}{3}R+R} + \frac{1}{R}\\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{3}{5}+1\right) = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{R} \implies R_3 = \frac{5}{8}R\\
\frac{1}{R_4} &= \frac{1}{R_3+R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{5}{8}R+R} + \frac{1}{R}\\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{8}{13}+1\right) = \frac{21}{13}\cdot\frac{1}{R} \implies R_4 = \frac{13}{21}R\\
\frac{1}{R_5} &= \frac{1}{R_4+R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{13}{21}R+R} + \frac{1}{R}\\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{21}{34}+1\right) = \frac{55}{34}\cdot\frac{1}{R} \implies R_5 = \frac{34}{55}R\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Naslućujemo da je $R_n = a_n R$, $a_n \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{n+1}} &= \frac{1}{R_n+R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{a_nR+R} + \frac{1}{R}\\
&= \frac{1}{R}\left(\frac{1}{a_n+1}+1\right) = \frac{a_n+2}{a_n+1}\cdot\frac{1}{R}\\
&\implies R_{n+1} = \frac{a_n+1}{a_n+2}R.
\end{aligned}$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo: $a_n \in \mathbf{Q} \implies \dfrac{a_n+1}{a_n+2} = a_{n+1} \in \mathbf{Q}$.

Budući da je $a_1 = 1 \in \mathbf{Q}$, to je za svaki $n \in \mathbf{N}$: $R_n = a_n R$, $a_n \in \mathbf{Q}$.

Nadalje je, zbog $a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_n+2}$ i $\dfrac{a_1+1}{a_1+2} = \dfrac{2}{3} = a_2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_n+2}$ za $\forall n \in \mathbf{N}$.

Također, za izračunane članove niza (a_n), $\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}\right)$ vrijedi $a_n = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}$. Dokažimo da to vrijedi općenito:

$$a_1 = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{1}.$$

Dovoljno je još pokazati da vrijedi implikacija:

$$a_n = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}} \implies a_{n+1} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{a_n+2} = \frac{\frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}+1}{\frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}+2} = \frac{f_{2n-1}+f_{2n}}{f_{2n-1}+2f_{2n}}$$

$$= \frac{f_{2n+1}}{f_{2n-1}+f_{2n}+f_{2n}} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+1}+f_{2n}} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+2}}.$$

Treba još dokazati da su brojevi f_{2n-1} i f_{2n} relativno prosti.

Inače, razlomci $a_n = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}$ ne bi imali u brojnicima i nazivnicima članove Fibonaccijeva niza. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbf{N}$ razlomak $a_n = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}$ neskrativ, a razlomak $a_{n+1} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+2}}$ skrativ. Dokažimo da je to nemoguće.

Radi jednostavnosti označimo $f_{2n-1} = p, f_{2n} = q$, tada je $a_n = \frac{p}{q}$, $a_{n+1} = \frac{p+q}{p+2q}$. Ako je razlomak a_{n+1} skrativ, tada je $p+q = m \cdot u, p+2q = m \cdot v$, $(u, v, m \in \mathbf{N},\ m > 1)$. Oduzimanjem posljednjih dviju jednakosti dobijemo $q = m(v-u)$. Tada je $p = mu - q = mu - m(v-u) = m(2u-v)$. Iz dobivenih izraza za p i q zaključujemo da oni imaju zajednički faktor m, $m > 1$, što se protivi pretpostavci da je $a_n = \frac{p}{q}$ neskrativ razlomak, te zaključujemo da su brojevi f_{2n-1} i f_{2n} relativno prosti za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Iz svega zaključujemo da je vrijednost ovako definiranog otpora R_n $(n \in \mathbf{N})$ jednak $R_n = a_n R = \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}}$, gdje su f_{2n-1} i f_{2n} članovi Fibonaccijeva niza.

Primjer 1. Zadana je dužina $\overline{AB}$ duljine a. Konstruiraj točku $T \in \overline{AB}$, $|AT| = x$, tako da točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.

Konstrukcija.

1. Konstruirajmo pravokutan trokut ABC kome su duljine kateta $|AB| = a$ i $|BC| = \frac{a}{2}$.
2. Konstruirajmo $D \in \overline{AC}$, tako da je $|CD| = |CB|$.
3. Konstruirajmo $T = \overline{AB}$, tako da je $|AT| = |AD|$ (slika 7). Tvrdimo da točka T čini na dužini $\overline{AB}$ zlatni rez.

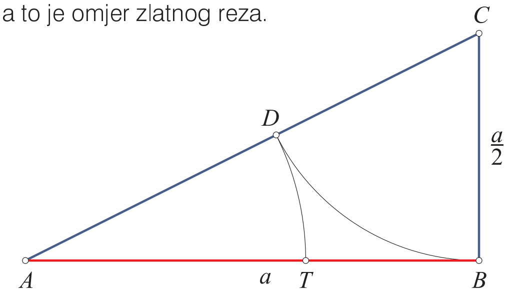
Dokaz.

$$|AC| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5};$$

$$x = |AT| = |AD| = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1);$$

$$a : x = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

a to je omjer zlatnog reza.



Slika 7.

Primjer 2. U geometrijskom paradoksu naveli smo da je ploština pravokutnika složenog od dijelova kvadrata u jednom slučaju bila za 1 veća, a u drugom slučaju za 1 manja od ploštine kvadrata. Dokažite općenito: Ako od kvadrata duljine stranice f_n, $n \geq 3$ na opisani način složimo pravokutnik, tada je ploština pravokutnika za 1 naizmjence manja, odnosno veća od ploštine kvadrata.

Dokaz.

Ako je f_n duljina stranice kvadrata, tada su duljine stranica pravokutnika f_{n-1} i f_{n+1}. Razliku ploština kvadrata i pravokutnika označimo s Δ. Tada je:

$$\Delta = f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 - f_{n-1}(f_{n-1}+f_n)$$
$$= f_n^2 - f_{n-1}^2 - f_{n-1}f_n$$

$$\Delta=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n}-\lambda_1^{n}\right)\right]^2-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\right)\right]^2$$
$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n}-\lambda_1^{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\right),$$

gdje je $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_1=-\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\lambda\lambda_1=-1$; $\lambda_1+\lambda=1$. Dalje je:

$$5\Delta=\lambda^{2n}-2\lambda^{n}\lambda_1^{n}+\lambda_1^{2n}-\lambda^{2n-2}+2\lambda^{n-1}\lambda_1^{n-1}$$
$$-\lambda_1^{2n-2}-\lambda^{2n-1}-\lambda_1^{2n-1}+\lambda^{n}\lambda_1^{n-1}+\lambda^{n-1}\lambda_1^{n}$$
$$5\Delta=\lambda^{2n-2}(\lambda^2-\lambda-1)+\lambda_1^{2n-2}(\lambda_1^2-\lambda_1-1)$$
$$-2(\lambda\lambda_1)^n+2(\lambda\lambda_1)^{n-1}+(\lambda\lambda_1)^{n-1}(\lambda+\lambda_1).$$

Budući da su λ i λ_1 rješenja jednadžbe $x^2-x-1=0$, to je:

$$\begin{aligned}5\Delta&=-2(-1)^n+2(-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}\\&=-2\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}\\&=5(-1)^{n-1}\end{aligned}$$

$\Delta=(-1)^{n-1}$, odakle slijedi tvrdnja zadatka.

Zadaci za vježbu

Dokažite da za članove Fibonaccijeva niza f_n vrijedi:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2}-1$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n\cdot f_{n+1}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k} = f_{2n+1}-1$
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k+1} = f_{2n+1}$
5. $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} f_k\cdot f_{k+1} = f_{2n}^2$

Naputak. Prve četiri jednakosti lako se dokažu primjenom definicijskog svojstva Fibonaccijeva niza. Dokaz pete nejednakosti može se provesti matematičkom indukcijom.

666

Ovaj broj često se zove vražjim (đavoljim) brojem. Pregrubo? Možda! Ali da je u najmanju ruku "vražićak", naslutiti dadu i sljedeća njegova svojstva.

1) $666=1^6-2^6+3^6$.
2) Neka je $\varphi(n)$ broj svih prirodnih brojeva manjih od n i relativno prostih sa n. Tada je $\varphi(666)=6\cdot6\cdot6$.
3) Broj 666 je zbroj kvadrata prvih 7 prostih brojeva: $2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$.
4) Broj 666 je trokutasti broj, vrijedi: $1+2+3+\ldots+36=666$. Ne zaboravimo da je taj zbroj ujedno i zbroj svih brojeva na kotaču ruleta.
5) Točno su dva načina kako se iz niza znamenki 123456789 umetanjem znaka $+$ dobije broj 666: $1+2+3+4+567+89=123+456+78+9=666$.
6) Točno je jedan način na koji se iz niza znamenki 987654321 umetanjem znaka $+$ dobije broj 666: $9+87+6+543+21=666$.
7) $666=2\cdot3\cdot3\cdot37$. Zbroj znamenaka svih prostih faktora broja 666 je $6+6+6$.
8) Broj 666 je šesti broj u nizu brojeva oblika $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$.
9) $DCLXVI$ je broj 666 u rimskom zapisu. Svaki od simbola $I=1$, $V=5$, $X=10$, $L=50$, $C=100$, $D=500$ pojavljuje se u ovom zapisu točno jednom.
10) $666=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$.
11) $-2\sin 666^\circ=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.6180339887\ldots$ (zlatni omjer).