Sangaku problemi
geometrijski problemi u japanskim hramovima – 2. dio

Milan Kabić, Zagreb

Prefektura Fukushima – svetište Naobi: geometrijski crteži koji podsjećaju na japanske lepeze. Prikazivane su u obliku raznih geometrijskih likova: kao krug, kružni isječak, elipsa, trokut ili kvadrat.

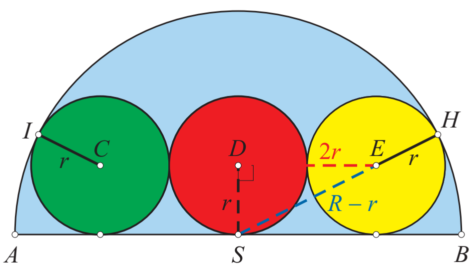
Riješeni primjeri

S obzirom na bogatstvo i raznolikost sadržaja koje obrađuju sangaku problemi te na njihov broj (oko 920 sačuvanih ploča, odnosno nekoliko tisuća problema), nemoguće je u jednom ovakvom kratkom osvrtu dati reprezentativan broj primjera i njihovih rješenja koji bi čitatelju dali približnu sliku o ovom fenomenu. Zato ću se ograničiti na nekoliko proizvoljno odabranih primjera.

Problem 1. U polukrug polumjera R upisana su tri sukladna kruga kao što je prikazano na slici 1. Koliki je omjer polumjera polukruga i promjera kruga?

Rješenje: Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut SED slijedi

$$(R-r)^2 = r^2 + (2r)^2$$



Slika 1.

$$R^2 - 2Rr - 4r^2 = 0 \qquad / : (4r^2)$$
$$\left(\frac{R}{2r}\right)^2 - \frac{R}{2r} - 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba ima rješenja

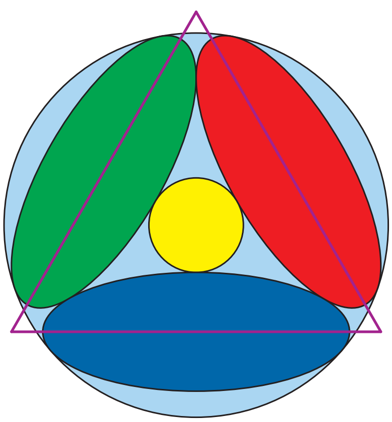
$$\left(\frac{R}{2r}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Uvjetima zadatka odgovara samo pozitivno rješenje

$$\frac{R}{2r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Dobili smo zanimljiv rezultat: *promjer $2r$ kruga je zlatni rez polumjera R polukruga*.

Problem 2. Na slici 2 prikazane su tri sukladne elipse, od kojih svaka dodiruje preostale dvije. Njihove glavne osi sijeku se u vrhovima jednakostraničnog trokuta. Dvije koncentrične kružnice, veća radijusa R i manja radijusa r, dodiruju sve tri elipse.



Slika 2.

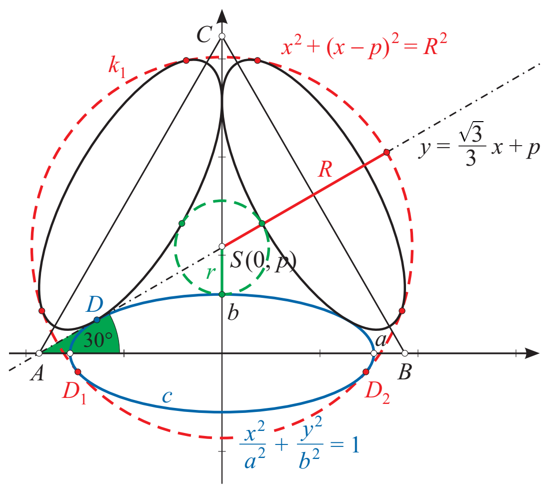
a) Prikažite R preko a i b, tj. pomoću velike i male poluosi elipse.

b) Ako je $r = b$, dokažite da je onda $a = 3b$.

Rješenje:

a) Zadatak ćemo riješiti koordinatnom metodom. Neka se osi elipse c podudaraju s koordinatnim osima, a središte s ishodištem koordinatnog sustava. Jednadžba elipse je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a jednadžba kružnice k_1 je $x^2 + (y-p)^2 = R^2$. Pravac AS tangenta je elipse c (slika 3). Njegova jednadžba glasi $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + p$ jer mu je koeficijent smjera $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a odsječak na y-osi je $l = p$. Iz uvjeta dodira $a^2k^2 + b^2 = l^2$ pravca i elipse, dobijemo da je

$$a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b^2 = p^2$$
$$p^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{3}. \qquad (1)$$



Slika 3.

Kružnica k_1 dira elipsu c u točkama D_1 i D_2 čije su ordinate jednake. Iz sustava što ga čine jednadžbe kružnice k_1 i elipse c:

$$x^2 = R^2 - (y-p)^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dobijemo

$$\frac{R^2 - (y-p)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$(a^2 - b^2)y^2 + 2b^2py + b^2(R^2 - p^2 - a^2) = 0.$$

Ova jednadžba mora imati samo jedno rješenje pa joj je diskriminanta jednaka nuli, tj.

$$(2b^2p)^2 - 4(a^2-b^2)b^2(R^2-p^2-a^2) = 0$$
$$R^2 = \frac{a^2(p^2+a^2-b^2)}{a^2-b^2}.$$

Uvrštavanjem (1) u ovaj izraz, nakon sređivanja dobijemo da je

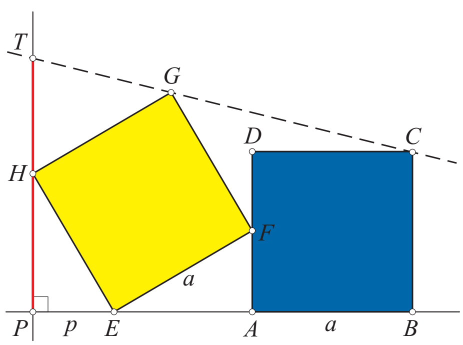
$$R = \frac{2a^2}{\sqrt{3\left(a^2-b^2\right)}}.$$

b) Ako je $r = b$, onda je $p = 2b$. Uvrštavanjem u (1) lako se dokaže da je

$$\frac{a^2+3b^2}{3} = (2b)^2$$
$$a = 3b.$$

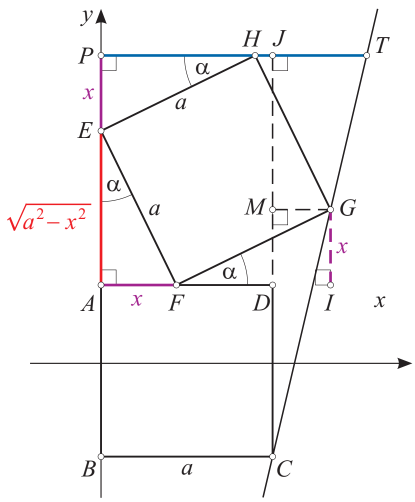
Problem 3. (*Autor ovog problema je Murai Sukehisa, učenik učitelja Fukuda Rikena. Sangaku ploča postavljena je oko 1846. godine u hramu Sumiyoshi u Prefekturi Osaka.*)

Jedna stranica kvadrata $ABCD$ leži na pravcu p. Drugi sukladan kvadrat $EFGH$ ima jedan vrh na pravcu p, a drugi vrh iste stranice leži na onoj stranici kvadrata $ABCD$ koja je okomita na pravac p (slika 4). Okomica kroz točku H na p siječe pravac p u točki P, a pravac CG u točki T. Odredi najveću moguću duljinu dužine $\overline{PT}$, ako je duljina stranice kvadrata a.



Slika 4.

Rješenje: Smjestimo sliku u koordinatnu ravninu kao što je prikazano na slici 5. Trokuti EAF, FIG i HPE su sukladni jer su im hipotenuze stranice kvadrata $EFGH$, a kutovi FEA, GFI i EHP su jednakih veličina. Označimo sa x duljine kateta nasuprot kutu α. Tada su duljine kateta uz kut α jednake $\sqrt{a^2-x^2}$.



Slika 5.

$$\triangle MCG \sim \triangle JCT \Rightarrow \frac{|GM|}{|MC|} = \frac{|TJ|}{|JC|}. \qquad (2)$$

Ako jednakosti

$$\begin{aligned} |GM| &= |ID| = |IF| - |FD| \\ &= \sqrt{a^2-x^2} - (a-x) \\ &= \sqrt{a^2-x^2} + x - a, \\ |MC| &= |MD| + |CD| = |GI| + a = x + a, \\ |TJ| &= |TP| - a, \\ |JC| &= |PB| = |PE| + |EA| + |AB| \\ &= x + \sqrt{a^2-x^2} + a \end{aligned}$$

uvrstimo u (2) dobijemo

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}+x-a}{a+x} = \frac{|TP|-a}{\sqrt{a^2-x^2}+x+a},$$
$$|TP| = a + \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a+x}.$$

Duljina dužine $\overline{TP}$ je funkcija

$$f(x) = a + \frac{2x\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x}$$

argumenta $x = |AF|$. Njezina derivacija

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + ax - a^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ima pozitivnu nultočku $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$.

Druga derivacija je $f''(x) = \frac{2a^2(x - 2a)}{(a + x)(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} a\right) = -\frac{\sqrt{10(\sqrt{5}-1)}}{a} < 0,$$

pa funkcija $f(x)$ za $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$ poprima maksimum

$$M = f(x_1) = f\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} a\right) = \left(\sqrt{10\sqrt{5} - 22} + 1\right) a.$$

Dakle najveća duljina dužine $\overline{TP}$ je

$$|TP|_{\max} = \left(\sqrt{10\sqrt{5} - 22} + 1\right) a.$$

U ovom zadatku krije se jedna zanimljivost. Naime dužina $\overline{TP}$ postiže najveću vrijednost ako je

$$|AF| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} |AB|$$

$$\Rightarrow |AB| : |AF| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

A to znači da točka F dijeli dužinu $\overline{AD}$ u zlatnom rezu. Uzimajući u obzir da za zlatni rez φ vrijedi $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ i $\varphi^2 = \varphi + 1$, dobiveni rezultat možemo interpretirati na sljedeći način

$$x_{\max} = \frac{a}{\varphi}, \quad |TP|_{\max} = a + \frac{2a\sqrt{\varphi}}{\varphi^3}.$$

Napomena: Zadatak se može riješiti i na drugi način, tako da se $|TP|$ prikaže kao funkcija kuta α:

$$|TP| = \frac{a \sin 2\alpha}{1 + \sin \alpha} + a = f(\alpha)$$

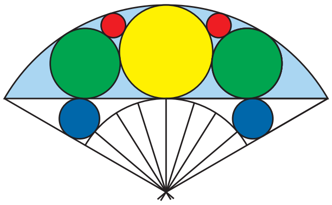
$$f'(\alpha) = \frac{2a\left(1 - \sin \alpha - \sin^2 \alpha\right)}{\left(1 + \sin \alpha\right)^2}$$

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \arcsin \frac{1}{\varphi}.$$

Lepeze

Mnogi crteži na sangaku pločama podsjećaju na japanske lepeze. Prikazane su u obliku raznih geometrijskih likova. U njih su upisani drugi likovi, tako da su ti crteži, ukrašeni raznim bojama, maštovite kompozicije koje zrače elegancijom

Slika 6.
Ova sangaku ploča postavljena je 1873. godine u svetištu Isinawa koje se nalazi u Prefekturi Ehime na otoku Shikoku. Dimenzije drvene ploče su 75 cm×91 cm. Autor problema je jedanaestogodišnji dječak Kinjiro Takasaki, učenik majstora Shoryua Yamazakija.



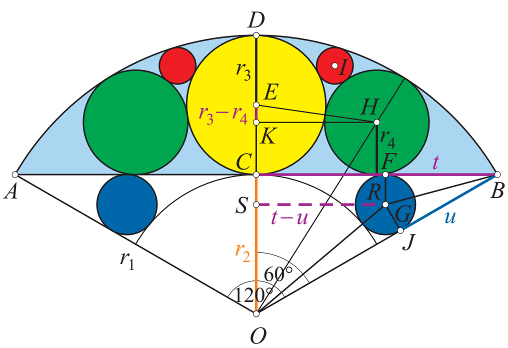
Slika 7.

i skladom. U nekim se problemima traži da se odrede razni elementi ili da se prikažu preko zadanih veličina, a u drugim se pak traže omjeri određenih veličina.

Problem 4. Lepeza ima oblik kružnog isječka sa središnjim kutom od 120° i polumjerom r_1. U isječak je upisano sedam krugova kao što je prikazano na slici 7. Pritom su krugovi iste boje jednakih polumjera. Prikažite polumjere svih krugova pomoću r_1 i odredite kvocijent crvenog i plavog kruga.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta OCB (slika 8) lako se uoči da je $r_2 = \dfrac{r_1}{2}$ i $t = |BC| = \dfrac{r_1\sqrt{3}}{2}$. Dalje imamo da je

$$|OD| = r_1 = r_2 + 2r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1}{4}.$$



Slika 8.

$$\begin{aligned}
\triangle KHE \Rightarrow & |KH|^2 + (r_3 - r_4)^2 = (r_3 + r_4)^2 \\
& |KH|^2 = 4r_3r_4 \\
\triangle KHO \Rightarrow & (r_1 - r_4)^2 = |KH|^2 + |OK|^2 \\
& (r_1 - r_4)^2 = 4r_3r_4 + (r_2 + r_4)^2 \\
& \Rightarrow r_4 = \frac{3}{16}r_1 \\
\triangle OSG \Rightarrow & (r_2 + R)^2 = (r_2 - R)^2 + (t - u)^2 \\
& u = \frac{\sqrt{3}}{2}r_1 - \sqrt{2Rr_1} \qquad (3) \\
\triangle OGJ \Rightarrow & (r_2 + R)^2 = R^2 + (r_1 - u)^2 \\
& (r_1 - u)^2 = \frac{r_1^2}{4} + r_1R \qquad (4)
\end{aligned}$$

Iz sustava što ga čine jednadžbe (3) i (4) eliminacijom nepoznanice u i sređivanja imamo da je

$$R + \sqrt{2r_1}\left(2 - \sqrt{3}\right)\sqrt{R} + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}r_1 = 0.$$

Supstitucijom $x = \sqrt{R}$ dobijemo kvadratnu jednadžbu čije je pozitivno rješenje

$$x = \sqrt{R} = \frac{\sqrt{2r_1}\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{2}$$

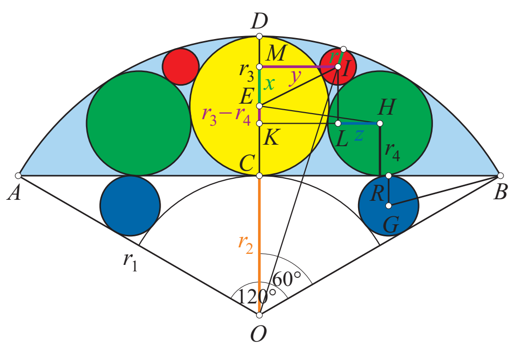
$$R = \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)^2}{2}r_1 = \frac{21 - 12\sqrt{3}}{2}r_1$$

i

$$u = \frac{3\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}r_1.$$

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute (slika 9) slijedi:

$$\begin{aligned}
&\triangle OMI \Rightarrow (r_1 + r)^2 = (r_2 + r_3 + x)^2 + y^2 \\
&\triangle EHK \Rightarrow y + z = 2\sqrt{r_3r_4} \\
&\triangle ILH \Rightarrow (r + r_4)^2 = z^2 + (x + r_3 - r_4)^2 \\
&\triangle EMI \Rightarrow x^2 + y^2 = (r_3 + r)^2.
\end{aligned}$$



Slika 9.

Iz ovog sustava od četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice na kraju se dobije da je:

$$r = \frac{3}{193}(25 - 12\sqrt{3})r_1,$$

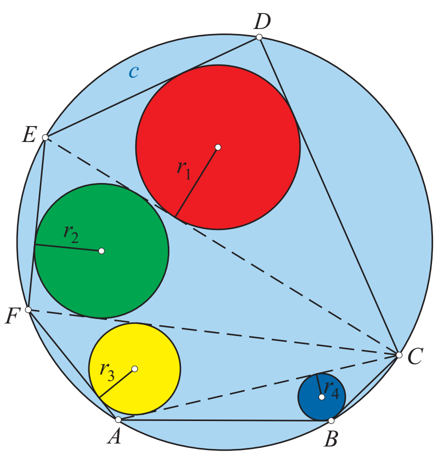
$$\frac{r}{R} = \frac{2(31 + 16\sqrt{3})}{193}.$$

Japanski teoremi

Na kraju bih spomenuo tri problema jer to zaslužuju svojom elegancijom i neobičnošću. U literaturi se spominju kao **japanski teoremi** ili **teoremi Y. Mikamija i T. Kobayashija**.

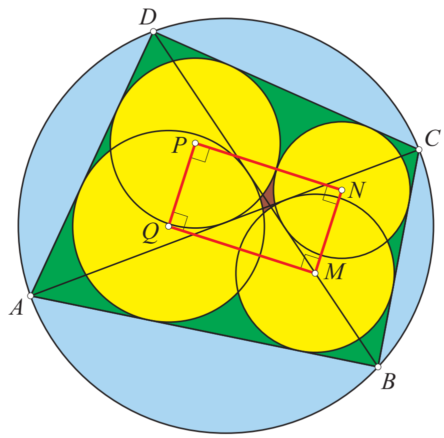
Prvi japanski teorem. Konveksan n-terokut upisan je u krug. Promatrajmo njegove triangulacije dobivene povlačenjem dijagonala iz jednog vrha. Postoji točno n takvih triangulacija. Time je poligon podjeljen na $n-2$ trokuta.

Pokaži da zbroj svih polumjera tim trokutima upisanih kružnica ne ovisi o odabranoj triangulaciji, tj. $r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-2} = c$.



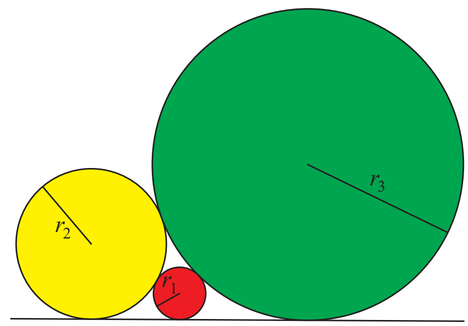
Slika 10. Prvi japanski teorem za šesterokut glasi: $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = c$.

Drugi japanski teorem. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut upisan u krug. Ako su točke M, N, P i Q središta trokutima ABC, BCD, CDA i DAB upisanih kružnica pokaži da je četverokut $MNPQ$ pravokutnik.



Slika 11.

Treći japanski teorem. (*Prefektura Gunma, 1824.*) Tri kruga koji se međusobno dodiruju izvana imaju zajedničku tangentu. Ako za njihove polumjere vrijedi $r_1 < r_2 < r_3$, onda je $\frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}}$.



Slika 12.