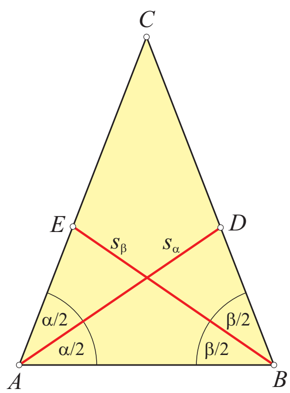
Dva planimetrijska
dokaza Steiner[1]–Lehmusova[2] teorema

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Prilikom utvrđivanja gradiva koje se odnosi na sukladnost trokuta (1. razred srednje škole) obično se dokazuje i ovaj teorem:

Teorem. U jednakostraničnom trokutu su jednake simetrale kutova na osnovici tog trokuta.

Dokaz. Neka su $s_\alpha = AD$ i $s_\beta = BE$ simetrale kutova na osnovici jednakokračnog trokuta ABC (slika 1.).



Slika 1.

Kako je $\sphericalangle BAE = \alpha = \beta = \sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle BAD = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \sphericalangle ABE$, te stranica $\overline{AB}$ zajednička obama trokutima, slijedi da je

$$\triangle ABD \cong \triangle ABE,$$

a odavde slijedi da je $|AD| = |BE|$, tj.

$$s_\alpha = s_\beta,$$

što je i trebalo dokazati.

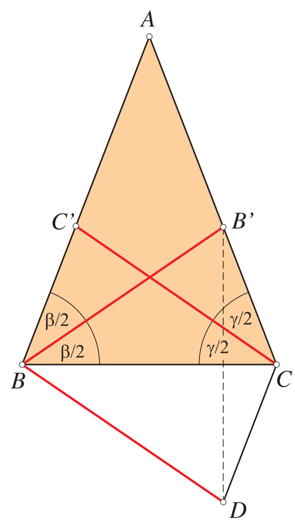
[1] Jakob Steiner, 1796.–1863., švicarski matematičar.
[2] Daniel Christian Ludolph Lehmus, 1780.–1863., njemački matematičar.

Kada je u pitanju obrat (konverzija) ovog teorema, tj. $s_\alpha = s_\beta \implies \triangle ABC$ je jednakokračan, dokaz se izvodi znatno teže. Dakle, sada je riječ o sljedećem teoremu koji je u matematici poznat kao *Steiner–Lehmusov teorem*.

Steiner–Lehmusov teorem. *Ako su simetrale dvaju kutova trokuta jednake, trokut je jednakokračan.*

U [1] je dano više dokaza ovog teorema. U tim se dokazima primjenjuje planimetrija, vektori, obrasci za duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta, trigonometrija i analitička geometrija. U članku ćemo izvesti dva planimetrijska dokaza ovog teorema za koje možemo reći da su nešto jednostavniji i lakši.

Dokaz 1. Neka su u trokutu ABC simetrale kutova na njegovoj osnovici jednake, tj. $s_\beta = s_\gamma$ (ili $|BB'| = |CC'|$; $B' \in \overline{AC}$, $C' \in \overline{AB}$) (slika 2.).



Slika 2.

Pretpostavimo da kutovi β i γ na osnovici $\overline{BC}$ trokuta ABC nisu jednaki. Neka je, primjerice:

$$\beta < \gamma. \qquad (1)$$

Zbog toga je

$$|B'C| < |C'B|. \qquad (2)$$

Paralela kroz točku B s dužinom $\overline{CC'}$ i paralela kroz točku C s dužinom $\overline{AB}$ sijeku se u točki D. Sada je četverokut $BC'CD$ paralelogram pa je zbog toga

$$|C'B| = |CD|. \qquad (3)$$

Sada iz (2) i (3) slijedi da je $|B'C| < |CD|$, pa iz trokuta $B'CD$ slijedi da je

$$\sphericalangle B'DC < \sphericalangle DB'C. \qquad (4)$$

Kako je $|BB'| = |CC'| = |BD|$, iz trokuta BDB' slijedi da je

$$\sphericalangle BDB' = \sphericalangle BB'D. \qquad (5)$$

Zbrojimo li sada jednakosti (4) i (5), dobivamo:

$$\sphericalangle BDC < \sphericalangle BB'C. \qquad (6)$$

Kako je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BC'C$ (jer je četverokut $BC'CD$ paralelogram), iz (6) slijedi: $\sphericalangle BC'C < \sphericalangle BB'C$, a odavde zbog $\sphericalangle BC'C = 180° - \beta - \dfrac{\gamma}{2}$ te $\sphericalangle BB'C = 180° - \gamma - \dfrac{\beta}{2}$ slijedi:

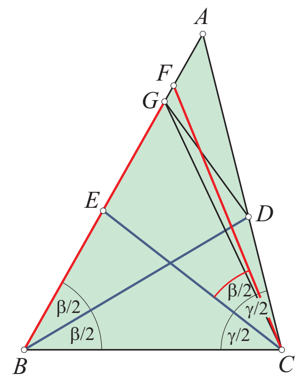
$$180° - \beta - \frac{\gamma}{2} < 180° - \gamma - \frac{\beta}{2},$$

tj.

$$\gamma < \beta,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom (1). Na potpuno analogan način dokazuje se da početna pretpostavka $\beta > \gamma$ nije točna. Dakle, pretpostavka da je $\beta \neq \gamma$ svodi se na kontradikciju pa ona nije točna. Znači, mora biti $\beta = \gamma$, tj. trokut ABC je jednakokračan, što je trebalo i dokazati.

Dokaz 2. Neka su opet BD i CE ($D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$) simetrale kutova β i γ u trokutu ABC. Dokazat ćemo da je $|AB| = |AC|$ ili $\beta = \gamma$. Pretpostavimo da kutovi β i γ nisu jednaki, neka je npr. $\beta < \gamma$. Tada na dužini $\overline{AE}$ postoji točka F takva da je $\sphericalangle FCE = \frac{1}{2}\beta$, i na dužini $\overline{AE}$ točka G takva da je $|BG| = |CF|$ (slika 3.).



Slika 3.

Sada trokuti $\triangle BGD$ i $\triangle CFE$ imaju jednake sljedeće elemente: $|BD| = |CE|$, $|BG| = |CF|$ i $\sphericalangle GBD = \sphericalangle FCE = \dfrac{\beta}{2}$, što znači da je $\triangle BGD \cong \triangle CFE$, a odavde slijedi da je i $\sphericalangle BGD = \sphericalangle CFE$. No, to ne može biti zbog činjenice da je $\sphericalangle BGD$ vanjski kut trokuta CFG te vrijedi:

$$\sphericalangle BGD > \sphericalangle BGC > \sphericalangle CFE.$$

Došlo je do kontradikcije (proturječja), pa pretpostavka $\beta < \gamma$ nije točna. Na sličan bismo način također dokazali da pretpostavka $\beta > \gamma$ nije točna. Znači, mora biti $\beta = \gamma$, a to znači da je i $|AB| = |AC|$, tj. trokut ABC je jednakokračan, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Vidimo da su oba dokaza Steiner–Lehmusova teorema indirektna. Iz ovog zaključujemo koliko je važno da mladi matematičari tijekom svog srednjoškolskog obrazovanja kroz razne primjere dobro svladaju ovu vrstu dokazivanja teorema.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

2/ A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.