Više rješenja
jednog trigonometrijskog zadatka

Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

U MiŠ-u br. 54 dano je šest rješenja za zadatak: Dokažite da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ. \qquad (1)$$

U ovom ćemo članku dati (samo) dva rješenja (jedno algebarsko i jedno geometrijsko) za sljedeći zadatak:

Zadatak. Dokažite da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ. \qquad (2)$$

Rješenje 1. (algebarsko) U ovom rješenju primijenit ćemo adicijsku formulu $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ iz koje proizlazi da je

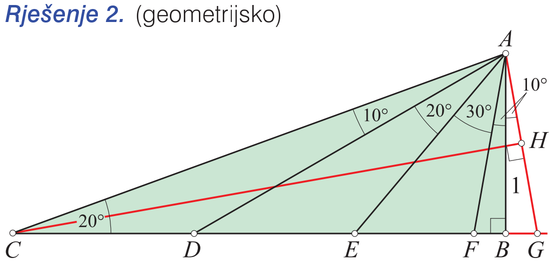
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(x+y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) \qquad (3)$$

i jednakost (1).

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \\
&\overset{(3)}{=} \operatorname{tg} 50^\circ(1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ) + \operatorname{tg} 60^\circ \\
&= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \\
&= (\text{zbog } \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 1) \\
&= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \\
&\overset{(3)}{=} \operatorname{tg} 110^\circ(1 - \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ) - \operatorname{tg} 10^\circ \\
&= (\text{zbog } \operatorname{tg} 110^\circ = -\operatorname{tg} 70^\circ) \\
&= -\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \\
&= \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - (\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ) \\
&\overset{(3)}{=} \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ(1 - \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ) \\
&= (\text{zbog } 50^\circ + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \text{ vrijedi da je} \\
&\quad \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ) \\
&= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ \\
&\qquad + \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ \\
&= (\text{zbog } \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 1) \\
&= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ \\
&\overset{(1)}{=} \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Rješenje 2. (geometrijsko)



Neka je trokut ABC pravokutan i neka je $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $\sphericalangle BAC = 70^\circ$ i $|AB| = 1$. Na kateti $\overline{BC}$ odredimo točke D, E i F tako da je $\sphericalangle CAD = 10^\circ$, $\sphericalangle DAE = 20^\circ$ i $\sphericalangle EAF = 30^\circ$ (vidi sliku). Lako slijedi da je $\sphericalangle FAB = 10^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 20^\circ$. U pravokutnim trokutima ACB, ADB, AEB i AFB je redom (zbog $|AB| = 1$) $\operatorname{tg} 70^\circ = |CB|$, $\operatorname{tg} 60^\circ = |DB|$, $\operatorname{tg} 40^\circ = |EB|$ i $\operatorname{tg} 10^\circ = |FB|$.

Da bismo dokazali jednakost (2), tj. $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$, vidimo da moramo dokazati da je

$$|CB| = |FB| + |EB| + |DB|.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
&|CB| = |FB| + |EB| + |DB| \\
&\iff |CD| + |DB| = |FB| + |EB| + |DB| \\
&\iff |CD| + |FB| + |EB|. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Odredimo sada na produžetku katete $\overline{CB}$ preko točke B točku G tako da je $\sphericalangle BAG = 10°$. Iz podudarnosti trokuta FAB i GAB vrijedi da je $|FB| = |BG|$ pa je jednakost (4) ekvivalentna s

$$|CD| = |BG| + |EB| \iff |CD| = |EG|. \quad (5)$$

Sinusov poučak primijenjen na trokut ACD daje

$$\frac{|AC|}{\sin 150°} = \frac{|CD|}{\sin 10°}$$
$$\iff |CD| = \frac{|AC| \cdot \sin 10°}{\sin 150°}$$
$$\iff |CD| = 2 \cdot |AC| \cdot \sin 10°. \quad (6)$$

Trokut ACG je jednakokračan (zbog $\sphericalangle CAG = \sphericalangle CGA = 80°$). Povucimo visinu $\overline{CH}$ u trokutu ACG. Tako je (gledajmo $\triangle ACH$)

$$\sin 10° = \frac{|AH|}{|AC|} \iff \sin 10° = \frac{|AG|}{2 \cdot |AC|}$$
$$\iff |AG| = 2 \cdot |AC| \cdot \sin 10°. \quad (7)$$

Trokut AEG također je jednakokračan (zbog $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AEG = 50°$) pa je

$$|EG| = |AG|. \quad (8)$$

Konačno iz (6), (7) i (8) dobivamo da je

$$|CD| = |EG|. \quad \blacksquare$$

Teško je povjerovati da će netko rješavati ovaj zadatak kao što je pokazano. U svakom slučaju to je zanimljivo za "skupljače" neobičnih (neuobičajenih) rješenja, a moguće je da se kod nekih čitatelja probudi interes da i sami nađu još neka neuobičajena rješenja. Zato je ovaj članak i napisan.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, A. Muminagić, *Više rješenja jednog trigonometrijskog zadatka*, MiŠ br. 54, godina 11./2010.