Nizovi

5. dio: Izbor zadataka

Anđelko Marić, Sinj

Ovim se člankom završava zamišljena stručno-metodička cjelina o nizovima objavljena u MIŠ-u ove školske godine. U prva četiri nastavka obrađeni su neki teorijski pojmovi iz tog važnog matematičkog područja. Držeći se poznate izreke *Theoria sine praxi sicut curus sine axi* (Teorija bez primjene je poput kotača bez osovine), te smo sadržaje potkrijepili i nekim praktičnim primjenama. Ovaj tekst sastoji se od jednog izbora zadataka o nizovima.

Nastojali smo da se ti zadaci sadržajem razlikuju od onih kakve obično susrećemo u udžbeničkoj srednjoškolskoj literaturi. Naime, ti su zadaci nešto složeniji i ne spadaju u takozvane **standardne** matematičke zadatke, to jest ne postoji opća metoda za njihovo rješavanje.

Isto tako smo nastojali da ti zadaci budu raznovrsni u svakom pogledu, to jest i po sadržaju i po načinu rješavanja. Zato se u tekstu može naići na pojmove iz raznih matematičkih područja, kao primjerice iz teorije brojeva, algebre, kombinatorike, trigonometrije i (čak) planimetrije.

Također smo nastojali poštovati načelo postupnosti izlaganja, zbog čega su, primjerice, prva dva zadatka jednostavnija od onih iza njih.

Svi zadaci riješeni su u potpunosti, pri čemu je sigurno da ponuđeni postupci rješavanja nisu jedini mogući, a možda nisu ni najjednostavniji. Zato se čitateljima predlaže, što oni sigurno i sami znaju, da zadatke najprije pokušaju riješiti samostalno. Tek poslije toga, svoj uradak (što uključuje i metodu i rezultat) neka usporede s ponuđenim. Pritom vam iskreno želim ono pravo zadovoljstvo koje iz toga proizlazi, a koje je, nažalost, često možda i jedino što nam ga ova naša struka omogućuje.

Zadatak 1. Zadan je niz (a_n) u kojem je
$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2,\ a_3 = 1 + 2 + 3, \ldots,$
$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$

a) Odredi opći član niza.

b) Odredi formulu za s_n, zbroj n početnih članova niza (a_n).

c) Dokaži da je $s_n + s_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

d) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{n^3}$.

Rješenje.

a) Koristeći se formulom za zbroj n početnih prirodnih brojeva, izravno dobijemo

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Treba izračunati $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ili

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2},$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right).$$

Budući da je

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ i } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

to je

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

c) Koristimo se već spomenutom formulom:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} s_n + s_{n-1} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(n+2+n-1), \end{aligned}$$

to jest

$$s_n + s_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}\right] \\ &= \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty} 1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 0$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^3} = \frac{1}{6}.$$

Zadatak 2. Zadan je geometrijski niz (a_n). Izrazite

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

pomoću n, $R_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ i $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$.

Rješenje. Označimo li kvocijent niza q, tada je

$$R_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Za umnožak članova geometrijskog niza vrijedi:

$$P_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Isto je tako

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \ldots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} \\ &= \frac{1}{a_1}\cdot\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{a_1}\cdot\frac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-q^n}{q^{n-1}-q^n} = \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \\ &= \frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{1}{q^{n-1}}\cdot a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{1}{a_1^2\cdot q^{n-1}}\cdot R_n. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\frac{R_n}{S_n} = a_1^2 \cdot q^{n-1} = \left[(a_1^2\cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{n}} = \left(a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}$$

to jest

$$\frac{R_n}{S_n} = P^{\frac{2}{n}} \quad \text{ili} \quad P = \left(\frac{R_n}{S_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Zadatak 3. Brojevi $\binom{14}{4}$, $\binom{14}{5}$ i $\binom{14}{6}$ jednaki su 1001, 2002 i 3003. Ti brojevi su tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

a) Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva k i n $(k < n,\ k > 1)$, tako da su brojevi $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ i $\binom{n}{k+1}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

b) Odredi najmanju takvu trojku brojeva.

c) Odredi još takve dvije trojke brojeva.

Rješenje.

a) Dovoljno je dokazati da jednadžba

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$$

ima beskonačno mnogo rješenja u skupu prirodnih brojeva n i k. Jednadžbu preoblikujemo ovako:

$$\begin{aligned} 2\cdot &\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+3)(n-k+2)}{(k-1)!} \\ &\quad + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Nakon skraćivanja dobije se

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{n-k+1}{k} &= 1 + \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k+1)} \\ \frac{2n-2k+2-k}{k} &= \frac{n^2-2nk+k^2+n-k}{k(k+1)} \\ (2n-3k+2)(k+1) &= n^2-2nk+k^2+n-k, \end{aligned}$$

ili nakon sređivanja

$$4k^2 - 4nk + (n^2 - n + 2) = 0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe po k je

$$D = 16n^2 - 16(n^2 - n - 2) = 16(n+2).$$

Odaberimo prirodan broj m tako da je $n + 2 = m^2$ ili $n = m^2 - 2$, $m \geq 2$. Vrijedi

$$k = \frac{4n \pm 4\sqrt{n+2}}{8} = \frac{m^2 - 2 \pm m}{2}.$$

Odavde je zbog $k < n < m^2$

$$k = \frac{m^2 - m}{2} - 1 = \frac{m(m-1)}{2} - 1.$$

Broj $m(m-1)$ je paran za svaki prirodan broj m. Zato je broj k prirodan za svaki $m \geq 2$. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

b) Najmanji prirodan broj n za koji je $n + 2$ kvadrat prirodnog broja je $n = 7$. To je zato jer za $n = 2$, $m = 4$ dobijemo $k = \dfrac{m(m-1)}{2} - 1 = 1$, što se protivi uvjetu $k > 1$.

Za $n = 7$ dobije se $k = 2$. Najmanja tražena trojka je $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$.

c) Za n možemo uzeti bilo koji prirodan broj za koji je $n+2$ kvadrat prirodnog broja. Takvi su na primjer brojevi $n = 23$ i $n = 47$.

Za $n = 23$ imamo $m^2{=}25$, $k = \dfrac{25-5}{2} - 1 = 9$.

Za $n = 47$ dobijemo $k = \dfrac{49-7}{2} - 1 = 20$.

To znači da su trojke $\binom{23}{8}$, $\binom{23}{9}$, $\binom{23}{10}$ i $\binom{47}{19}$, $\binom{47}{20}$, $\binom{47}{21}$ također po tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Zadatak 4. Nizovi $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ i $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ definirani su ovako:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & a_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, \\ b_0 &= 1, & b_{n+1} &= \frac{\sqrt{1 + b_n^2} - 1}{b_n}; \qquad n \in \mathbf{N}_0. \end{aligned}$$

Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n.$$

Rješenje.

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4},$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}.$$

Za $n=0$ i $n=1$ vrijedi $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$. Dokažimo da to vrijedi općenito.

Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \implies a_{n+1} = \sin\frac{\pi}{2^{n+3}}.$$

Zaista,

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2\cdot 2^{n+2}},$$

to jest $a_{n+1} = \sin\frac{\pi}{2^{n+3}}$. Time je tvrdnja dokazana.

Isto je tako

$$b_1 = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}}-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Za $n=0$ i $n=1$ vrijedi $b_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$. Dokažimo da i to vrijedi općenito.

I ovdje je dovoljno dokazati analognu implikaciju

$$b_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}} \implies b_{n+1} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+3}}.$$

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2\cdot 2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2\cdot 2^{n+2}}\cos\frac{\pi}{2\cdot 2^{n+2}}},$$

to jest $b_{n+1} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+3}}$.

Zadani nizovi su, dakle, određeni formulama $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$ i $b_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

Za svaki $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ vrijedi $\sin\varphi < \varphi < \operatorname{tg}\varphi$.

Budući da je $0 < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{4}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, to je

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

i konačno

$$a_n < \frac{\pi}{2^{n+2}} < b_n,$$

odnosno

$$2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n.$$

Zadatak 5. Za nizove (a_n), (b_n) i (c_n) vrijedi $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 2$. Daljnji članovi niza definirani su ovako:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n),$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n),$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Dokaži da su ti nizovi konvergentni i izračunaj njihove granične vrijednosti.

Rješenje. Iz zadanih podataka imamo:

$$a_2 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(0+2) = 1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}.$$

Isto je tako:

$$a_3 = \frac{3}{4}, \quad b_3 = 1, \quad c_3 = \frac{5}{4}.$$

Također vrijedi

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}(b_n + c_n) + \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$= a_n + b_n + c_n.$$

Odavde je, zbog $a_1+b_1+c_1=3$, $a_n+b_n+c_n=3$ za svaki $n\in\mathbf{N}$. Dalje je

$$a_n=3-(b_n+c_n)=3-2a_{n+1}$$

ili

$$2a_{n+1}+a_n=3,$$

odakle je

$$2a_{n+2}+a_{n+1}=3.$$

Oduzimanjem zadnjih dviju jednakosti, dobijemo

$$2a_{n+2}-2a_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0$$

ili

$$2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0.$$

Karakteristična diferencijska jednadžba glasi

$$2x^2-x-1=0.$$

Rješenja ove jednažbe su $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

Opći član niza (a_n) glasi

$$a_n=A\cdot 1^n+B\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Odavde je za $n=1$ i $n=2$

$$A\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot B=0,$$
$$A+\frac{1}{4}\cdot B=\frac{3}{2}.$$

Rješenje ovog sustava je $A=1$, $B=2$. Zato je opći član niza (a_n)

$$a_n=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Granična vrijednost tog niza je

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=1.$$

Također je $b_n=3-(a_n+c_n)=3-2b_{n+1}$ ili $2b_{n+1}+b_n=3$ i $b_1=1$.

Odavde se matematičkom indukcijom lako dokaže da je $b_n=1$ za svaki $n\in\mathbf{N}$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty}b_n=1.$$

Isto je tako

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}c_n&=\lim_{n\to\infty}[3-(a_n+b_n)]\\&=3-\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=3-1-1,\end{aligned}$$

to jest $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$. Ovo se moglo odrediti i iz jednakosti $a_n+b_n+c_n=3$.

Zadatak 6. Dokaži da su svi članovi niza

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right]$$

prirodni brojevi.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je a_n djeljiv brojem 3.

Rješenje. Označimo li $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$, onda je $x+y=4$, $x\cdot y=1$. Zato je

$$\begin{aligned}x^{n+2}-y^{n+2}&=(x+y)(x^{n+1}-y^{n+1})+xy^{n+1}-yx^{n+1}\\&=(x+y)(x^{n+1}-y^{n+1})-xy(x^n-y^n)\\&=4(x^{n+1}-y^{n+1})-(x^n-y^n).\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je

$$\begin{aligned}a_{n+2}=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}&\left[(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}\right]\\&-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right],\end{aligned}$$

to jest

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n. \tag{1}$$

Također je

$$a_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}=1,$$
$$a_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{4})=4.$$

Odavde je, zbog (1), svaki član niza cijeli broj. Isto je tako $2+\sqrt{3}>1$, $0<2-\sqrt{3}<1$, zbog čega je

$$(2+\sqrt{3})^n>(2-\sqrt{3})^n,$$

to jest $a_n>0$ za svaki $n\in\mathbf{N}$.

Konačno je $a_n\in\mathbf{N}$, za svaki $n\in\mathbf{N}$.

Do relacije (1) mogli smo doći i ovako.

Iz zadanog izraza za niz (a_n) zaključujemo da je $a_n = Ax^n + By^n$. Budući da je $x + y = 4$ i $xy = 1$, pripadna diferencijska jednadžba glasi

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

odakle je

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Iz $a_1 = 1$ i $a_2 = 4$ dobijemo $a_3 = 4 \cdot 4 - 1$, $a_3 = 15$. Zaključujemo da je od početnih triju članova niza jedino a_3 djeljiv brojem 3. Dalje je

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 4a_{n+2} - a_{n+1} = 4(4a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} \\ &= 15a_{n+1} - 4a_n. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da će član a_{n+3} biti djeljiv brojem 3 ako i samo ako je član a_n djeljiv brojem 3.

Budući je a_3 djeljiv brojem 3, to su i članovi a_6, a_9, $a_{12}, \ldots$, općenito članovi a_{3k}, $k \in \mathbf{N}$, djeljivi brojem 3.

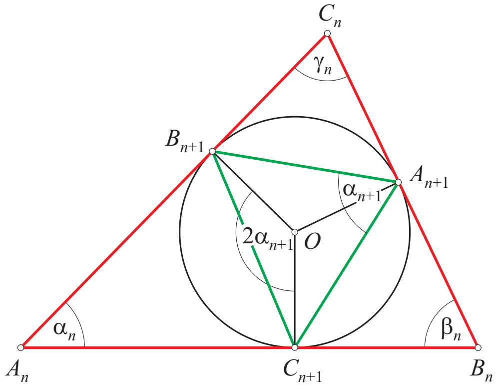
Zaključak: Član a_n djeljiv je brojem 3 samo ako je n djeljiv brojem 3.

Zadatak 7. Zadan je niz trokuta s vrhovima A_n, B_n, C_n i pripadnim kutovima α_n, β_n, γ_n, pri čemu je $A_1B_1C_1$ bilo koji trokut.

Vrhovi trokuta $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ dirališta su trokutu $A_nB_nC_n$ upisane kružnice.

Odredi $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

Rješenje.



Uz oznake kao na slici iz četverokuta $A_nC_{n+1}OB_{n+1}$ slijedi:

$$\alpha_n + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\alpha_{n+1} = 2\pi$$

ili

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_n.$$

Odavde slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}, \\ \alpha_{n-1} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-2}, \\ \alpha_{n-2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-3}, \\ &\vdots \\ \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_2, \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1. \end{aligned}$$

Množeći prvu od ovih jednadžba s $-\frac{1}{2}$, drugu s $\frac{1}{4}$, treću s $-\frac{1}{8}$ i općenito k-tu s $\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ i nove jednadžbe zbrojimo, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \alpha_n = \frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots \\ + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\Big) + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-2}}\alpha_1. \end{aligned}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\Big) \\ &\qquad = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\alpha_1 = 0,$$

zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0,$$

to jest $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}$.

Potpuno se isto dokaže i za kutove β_n, odnosno γ_n. To znači da je ovako definiran niz trokuta konvergentan i teži jednakostraničnom trokutu.