

Metode rješavanja logičkih zadataka

Tanja Debelec, Čakovec



Logički zadaci ili detektivski zadaci, kako ih se ponegdje naziva u literaturi, kako učenicima, tako i nama odraslima jako su zanimljivi i volimo ih rješavati.

Zašto se nazivaju detektivski zadaci?

Detektivski zadaci zato što moramo nešto otkriti, bilo da je riječ o lašcima i istinoljupcima, o tome kome što pripada, tko je ukrao nešto, otkriti redoslijed natjecatelja na natjecanjima, tko, gdje i što radi ili predaje itd. . . Takve zadatke redovito obrađujem na dodatnoj nastavi matematike.

Kroz rješavanje ovih zadataka razvija se logičko mišljenje. Zadaci su zabavni, poučni, te mogu učenike jako zainteresirati za matematiku.

Zadatke možemo rješavati raznim metodama. To su zadaci koji se sastoje od rješavanja kompliciranih situacija, ukrštenih izjava i jezičnih zavrzlama. Na temelju tih izjava i podataka naš je cilj da zaključimo koji su objekti međusobno povezani. Sva-

ki zadatak ima jedinstveno rješenje. Navest ću nekoliko metoda pomoću kojih ih možemo rješavati.

I. metoda zdravog razuma

Za ovu metodu nije potrebno veliko matematičko znanje. Metoda koristi zdrav razum i analizu podataka koji su zadani. Mogu ga rješavati i učenici nižih razreda na dodatnoj nastavi.

Primjer. Tri prijateljice krenule su u šetnju. Imale su suknje i majice bijele, crvene i plave boje. Znamo da je samo Ana imala suknju i majicu iste boje, da Marta nije imala ni suknju ni majicu bijele boje, a da je Lara imala crvenu majicu. Kako je koja djevojčica bila obučena?

Rješenje. Znamo da Lara ima crvenu majicu, a Marta nema ništa bijelo. Znači da Ana ima bijelu majicu, a Marta plavu. Ana ima suknju i majicu iste boje. Zaključujemo da Ana ima bijelu suknju, Marta crvenu, a Lara plavu suknju.

II. metoda uvođenja pretpostavke

Bit ove metode sastoji se u tome da, rješavajući problem, za rješenje odaberemo tvrdnju koju ćemo prema uvjetima zadatka mijenjati, te analizom vršiti korekciju lažnog rješenja i tako doći do pravog rješenja.

Primjer. Tri djevojčice čija su imena Gordana, Lidija i Nataša, na natjecanju u gimnastici zauzele su prva tri mjesta. Na pitanje prijateljica, koja je koje mjesto zauzela, dobiveni su sljedeći odgovori:

- Gordana: "Ja sam zauzela prvo mjesto."
- Lidija: "Ja nisam zauzela prvo mjesto."
- Nataša: "Ja nisam zauzela treće mjesto, ali imajte u vidu da je odgovor samo jedne moje prijateljice istinit."

Koje je mjesto zauzela Nataša, ako se zna da je njezin odgovor u potpunosti istinit?

Rješenje. Pretpostavimo da Gordana govori istinu, onda je i Lidija rekla istinu, jer ove dvije nisu mogle zauzeti prvo mjesto.

Dakle, izjave da su obje rekly istinu, ali s obzirom na Natašinu izjavu, naša pretpostavka nije dobra.

Pretpostavimo zato da je Gordana rekla laž, što znači da ona nije zauzela prvo mjesto, dakle onda je Lidija rekla istinu.

To govori da ni ona nije zauzela prvo mjesto. Međutim, jedna od te tri djevojčice morala je zauzeti prvo mjesto, pa zaključujemo da je to Nataša.

III. metoda tablica

Ovaj način rješavanja vrlo je pregledan. Iz vlastitog iskustva mogu reći da učenici najviše vole ovu metodu. U pitanju su skupovi objekata. Ako su skupovi objekata u relaciji, tada u presjeku tih dva skupova stavljamo +, a ako nisu stavljamo –.

Primjer. Pet sestara ima rođendane u različitim mjesecima i različitim danima u tjednu. Koristeći se sljedećim tvrdnjama, odredi mjesec i dan u kojem je svaka sestra rođena.

1. Paula je rođena u ožujku, ali ne u subotu. Anin rođendan nije bio u petak ili srijedu.
2. Djevojka čiji je rođendan u ponedjeljak rođena je ranije tijekom godine od Barbare i Marte.
3. Tara nije rođena u veljači, ali njezin rođendan bio je za vikend.
4. Marta nije rođena u prosincu, niti joj je rođendan u radnom tjednu. Djevojka čiji je rođendan bio u lipnju rodila se u nedjelju.
5. Tara je rođena ranije tijekom godine od Barbare, čiji rođendan nije bio u petak. Marta nije rođena u srpnju.

Rješenje. Nacrtamo tablicu koja će nam pomoći u rješavanju logičkih problema. Tamo gdje se vodoravni i horizontalni kvadrati presijecaju, tamo su naši mogući odgovori. Kada pronađemo istinitu relaciju, upišemo +, a kada je relacija lažna, pišemo –.

	Veljača	Ožujak	Lipanj	Srpanj	Prosinac	Nedjelja	Ponedjeljak	Srijeda	Petak	Subota
Ana										
Barbara										
Marta										
Paula										
Tara										
Nedjelja										
Ponedjeljak										
Srijeda										
Petak										
Subota										

Iz prve izjave imamo da je Paula rođena u ožujku, pa stavimo + u kvadratić Paula-Ožujak kao što je prikazano. Ako je Paula rođena u ožujku, ostale mogućnosti ne vrijede, tako da ostatak retka i stupca označimo sa –. Paulin rođendan nije u subotu te u kvadratić Subota-Paula upisujemo –. U drugoj polovici prve izjave vidimo da Anin rođendan nije u

srijedu ili petak, pa označimo Ana-srijeda, petak – (desni dio tablice).

	Veljača	Ožujak	Lipanj	Srpanj	Prosinac	Nedjelja	Ponedjeljak	Srijeda	Petak	Subota
Ana		-						-	-	
Barbara		-								
Marta		-								
Paula	-	+	-	-	-					-
Tara		-								
Nedjelja										
Ponedjeljak										
Srijeda										
Petak										
Subota										

Iz druge izjave imamo da Barbara i Marta nisu mogle biti rođene u veljači i u ponedjeljak jer imamo djevojku čiji je rođendan u ponedjeljak. U kvadratiće Barbara-veljača i Marta-veljača upisujemo –. U donjem dijelu tablice, u kvadratić ponedjeljak-srpanj, prosinac upisujemo –, jer djevojke Barbara i Marta imaju rođendane nakon djevojke čiji je rođendan u ponedjeljak.

Iz treće izjave imamo da Tara nije rođena u veljači i da je rođena za vikend. Sada pišemo – za Tara-veljača i Tara-ponedjeljak, srijeda, petak.

Gledajući tablicu, vidimo da je Ana rođena u veljači, pa stavljamo + u kvadratiću Ana-veljača i –

	Veljača	Ožujak	Lipanj	Srpanj	Prosinac	Nedjelja	Ponedjeljak	Srijeda	Petak	Subota
Ana	+	-	-	-	-			-	-	
Barbara	-	-	-	-	-		-	-	-	
Marta	-	-	-	-	-		-	-	-	
Paula	-	+	-	-	-					-
Tara	-	-	-	-	-		-	-	-	-
Nedjelja										
Ponedjeljak				-	-					
Srijeda	-									
Petak	-									
Subota										

u ostatku vodoravnog niza. Iz prve tvrdnje znamo da Anin rođendan nije u petak ili u srijedu, pa u donjem dijelu tablice za veljača-srijeda pišemo –.

Iz četvrte izjave vidimo da Marta nije rođena u prosincu tako da pišemo – u kvadratić Marta-prosinac i Marta-srijeda, petak –.

Iz druge izjave znamo da je i Tarin rođendan bio za vikend. Tako u desnom dijelu tablice, subotu i nedjelju možemo upisati – za Anu, Barbaru i Paulu.

Ostaje samo ponedjeljak za Anu i upisujemo +, a ostatak stupca za ponedjeljak –.

Od zadnjeg dijela četvrte izjave, u donjem dijelu tablice, stavimo + za lipanj-nedjelja, a – za ostatak stupca i retka. Također, u gornjem dijelu tablice, upisujemo – za Barbara-lipanj, jer znamo da joj rođendan nije bio za vikend.

	Veljača	Ožujak	Lipanj	Srpanj	Prosinac	Nedjelja	Ponedjeljak	Srijeda	Petak	Subota
Ana	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-
Barbara	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Marta	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Paula	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
Tara	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nedjelja	-	-	+	-	-					
Ponedjeljak				-	-					
Srijeda	-		-							
Petak	-		-							
Subota			-							

Iz pete izjave da je Tara rođena prije Barbare, upisujemo – za Tara-prosinac, jer nije mogla biti rođena posljednja. Ostane nam samo prosinac za Barbaru, pa stavimo + u kvadratić Barbara-prosinac, ostale retke i stupce popunimo sa –. Od druge polovice izjave, znamo da Marta nije rođena u srpnju pa je Tara rođena u srpnju. Stavimo + u kvadratić Tara-srpanj, a u ostale retke i stupce –. Uočavamo da mora biti + u kvadratiću Marta-lipanj.

Lipanj ide uz nedjelju i upisujemo + u Marta-nedjelja, ostatak retka i stupca sa –.

Ostaje da je Tara rođena u subotu. Na kraju, Barbarin rođendan nije bio u petak, pa zaključujemo da je Barbarin rođendan u srijedu, a Paulin u petak.

	Veljača	Ožujak	Lipanj	Srpanj	Prosinac	Nedjelja	Ponedjeljak	Srijeda	Petak	Subota
Ana	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-
Barbara	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-
Marta	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-
Paula	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-
Tara	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+
Nedjelja	-	-	+	-	-					
Ponedjeljak	+	-	-	-	-					
Srijeda	-	-	-	-	+					
Petak	-	+	-	-	-					
Subota	-	-	-	+	-					

Naš logički problem je riješen. Iz tablice odčitamo odgovor:

- Ana je rođena u veljači u ponedjeljak.
- Barbara je rođena u prosincu u srijedu.
- Marta je rođena u lipnju u nedjelju.
- Paula je rođena u ožujku u petak.
- Tara je rođena u srpnju u subotu.

IV. metoda grafova

Podaci koji su zadani u zadacima često predstavljaju dva, tri ili više skupova čiji su elementi na neki način povezani. Crtanjem Euler-Vennovih dijagrama skupova i povezivanja elemenata linijama, dobit ćemo graf iz kojih ćemo odčitati rješenje našeg problema. Neke su od linija zadane, a mi moramo otkriti nepoznate linije.

Graf čini određen broj točaka i određen broj linija koje ih povezuju. Zornost kod grafova omogućuje da se njima lako koristi u rješavanju logičkih i drugih zadataka.

Ako su dva elementa u određenoj relaciji, onda ih spojimo punom linijom (to odgovara stavljanju "+")

u tablici pri tabličnom rješavanju), a ako nisu u toj relaciji, onda iscrtkanom linijom (može i linijom druge boje).

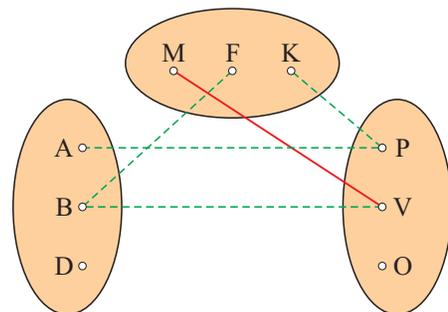
Primjer. Tri učiteljice (Anita, Bojana i Dijana) predaju tri različita predmeta (matematiku, fiziku i kemiju) u školama u Poreču, Varaždinu i Osijeku. Znamo sljedeće:

1. Anita ne radi u Poreču, a Bojana ne radi u Varaždinu.
2. Porečanka ne predaje kemiju.
3. Ona koja radi u Varaždinu predaje matematiku.
4. Bojana ne predaje fiziku.

Što i gdje predaje Dijana?

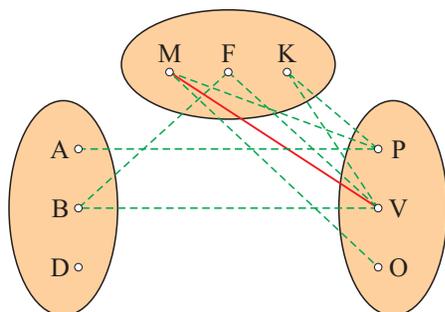
Rješenje. Promatramo tri skupa – skup učiteljica, skup predmeta i skup gradova. Skupove predstavimo Euler-Vennovim dijagramima (elementi skupova označeni su samo početnim slovima njihovih naziva).

Ako učiteljica predaje zadani predmet, crtamo punu liniju između imena učiteljice i predmeta, a ako ne predaje, onda stavljamo iscrtkanu liniju. Zapis našeg zadatka u grafu izgleda ovako:



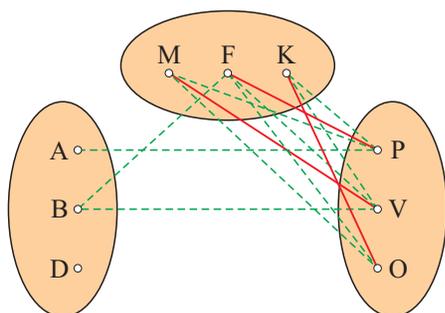
Dopunjavajući graf postupno, lako dolazimo do rješenja.

Krećemo od učiteljice koja predaje matematiku (M) u Varaždinu (V). Ona ne predaje fiziku i kemiju, pa povežemo V-F i V-K iscrtkanom linijom, ali i M-P, te M-O jer je matematičarka iz Varaždina.



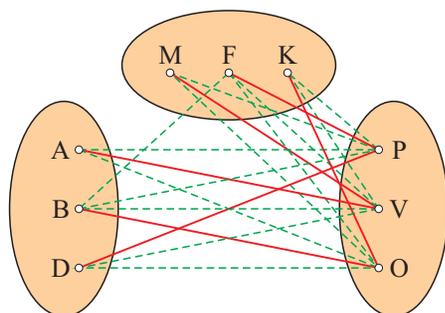
Uočavamo da ona koja predaje kemiju radi u Osijeku. Spojimo K-O punom linijom. Preostaje da fiziku predaje ona koja radi u Poreču, pa spojimo F-P punom linijom, ali onda je F-O iscrtkano.

Dobili smo sljedeći graf:

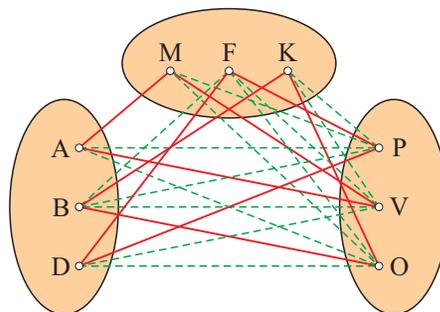


Bojana ne predaje fiziku, pa nije iz Poreča. Povežemo B-P iscrtkano i zaključujemo da B-O moramo spojiti punom linijom.

Zatim spojimo A-O iscrtkano, pa ostaje da A-V i D-P spojimo punom linijom, a D-V i D-O iscrtkano.



Sada jednostavno dopunimo tako da dobijemo tri trokuta s punim linijama. (A-M-V, B-K-O, D-F-P).



Odčitavamo s grafa rješenje zadatka: Anita predaje matematiku u Varaždinu, Bojana predaje kemiju u Osijeku i Dijana predaje fiziku u Poreču.

V. metoda isključivanja

Bit ove metode jest da se pri analizi uvjeta zadatka isključi ono što neki objekt nije ili nema. Na taj način sužujemo izbor ili ubrzavamo razvrstavanje.

Primjer. Svaki od učenika Petar, Nikola i Martin dobili su na ispitu iz matematike jednu od ocjena: 3, 4, 5. Kad su jednog njihova prijatelja pitali koje su ocjene dobili Petar, Nikola i Martin, on je odgovorio:

“Petar je dobio 3, Nikola 4, a Martin 4 ili 5.”

Ispostavilo se da nijedna od tih izjava nije točna. Odredi koju je ocjenu dobio svaki od učenika.

Rješenje. Martin je dobio 4 ili 5, izjava nije točna, zaključujemo da je Martin dobio 3.

Nikola nije dobio 4, već 3 ili 5, a Martin je dobio 3. Zaključujemo da je Nikola dobio 5, i konačno Petar je dobio 4.

VI. metoda algebre izjava

Za primjenu ove metode potrebno je odgovarajuće znanje o algebri izjava (negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalencija) i operacije s njima. Ova metoda nije namijenjena osnovnoškolcima.

Primjer. Na šahovskom turniru prva četiri mjesta zauzeli su Anka, Jelena, Mira i Sanja. Na pitanje kako su se plasirale, pobjednici su izjavili:

- Anka: “Jelena je druga, Mira treća.”
- Jelena: “Mira je druga, Anka četvrta.”
- Mira: “Anka je treća, Sanja druga.”

Nezadovoljna svojim uspjehom Sanja nije željela davati izjavu. Ostali su s namjerom da zbune novinare, dali po jedan točan i jedan netočan podatak, i tu svoju namjeru na kraju im i otkrili.

Među novinarima bio je jedan koji je znao matematičku logiku i u njegovu listu objavljen je točan raspored natjecateljica. Kako je novinar odredio točan redoslijed?

Rješenje. Označimo sa J_2 tvrdnju da je Jelena osvojila drugo mjesto, sa M_3 da je Mira zauzela treće mjesto itd. Tako dobivamo tri formule iz tri izjave

$$J_2 + M_3 = 1, \quad M_2 + A_4 = 1, \quad A_3 + S_2 = 1$$

(Disjunkcija jednog točnog i jednog netočnog iskaza je točan iskaz, $1 + 0 = 1$)

Iskoristimo zakon distributivnosti konjunkcije prema disjunkciji:

$$(J_2 + M_3) \cdot (M_2 + A_4) = 1,$$

odakle je

$$J_2 \cdot M_2 + J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot M_2 + M_3 \cdot A_4 = 1$$

Ovdje je $J_2 \cdot M_2 = 0$ jer ne mogu i Jelena i Mira biti druge. Također je i $M_3 \cdot M_2 = 0$ jer ne može Mira biti treća i druga. Ostaje:

$$J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4 = 1.$$

Uzmimo u obzir i treću izjavu, pa dobivamo:

$$(J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4) \cdot (A_3 + S_2) = 1,$$

odakle je

$$J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 + J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 + M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 + M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1.$$

Zaključujemo da je

$$J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0, \quad J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 = 0 \quad \text{i} \quad M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0,$$

pa ostaje

$$M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1.$$

Dakle, Mira je treća, Anka četvrta, Sanja druga, te preostaje da je Jelena prva.

Za domaću zadaću zadajem nimalo neinteresantan detektivski zadatak. Izaberite metodu i krenite u rješavanje. Sretno!

Zadatak. Pet brodova privezano je u luci. O njima znamo sljedeće :

1. Grčki brod polazi u 6 i prevozi kavu.
2. Brod u sredini ima crni dimnjak.
3. Engleski brod polazi u 9.
4. Francuski brod ima plavi dimnjak i nalazi se s lijeve strane broda koji prevozi kavu.
5. S desne strane broda koji prevozi kakao nalazi se brod koji ide u Marseille.
6. Brazilski brod ide za Manilu.
7. Pored broda koji prevozi klipić usidren je brod sa zelenim dimnjakom.
8. Brod koji ide za Genovu polazi u 5.
9. Španjolski brod polazi u 7 i nalazi se s desne strane broda koji ide u Marseille.
10. Brod s crvenim dimnjakom ide za Hamburg.
11. Pored broda koji polazi u 7 nalazi se brod s bijelim dimnjakom.
12. Brod usidren na kraju prevozi kukuruz.
13. Brod s crnim dimnjakom polazi u 8.
14. Brod koji prevozi kukuruz usidren je do broda koji prevozi klipić.
15. Brod za Hamburg polazi u 6.

Pitanje: Koji brod ide za Port Said? Koji brod prevozi čaj?

Zanimljivost

Recept za dugovječnost i vitalnost je, kako kaže 100-godišnja Austrijanka Hermine Brummeir iz Welsa, čitanje krimića i rješavanje križaljki. Najstarija članica gradske biblioteke u Welsu, Hermine Brummeir već pola stoljeća redovito posuđuje krimiće, svoju veliku strast, kako priznaje. Usto svaki dan rješava križaljke. “To je napeto, a i drži me u mentalnoj kondiciji”, izjavila je Hermine lokalnim medijima.