

Primjena

jednostavnoga kamatnog računa na “račun zadužnica”



Kristina Matijević,
Ekonomska škola, Požega
Bojan Kovačić,
Tehničko veleučilište, Zagreb

U nastavi gospodarske matematike u ekonomskim i njima srodnim srednjim strukovnim školama, te na visokim školama i fakultetima jedna od osnovnih tema jest jednostavni kamatni račun. Pritom se kao uobičajene primjene te vrste računa spominju obračun kamata na štedne uloge po viđenju (*a vista*), račun mjenica i sl. U ovom ćemo članku opisati još jednu primjenu toga računa, i to na određenu vrstu kratkoročnih vrijednosnih papira kojima se danas često trguje na tržištima kapitala. Time ćemo nastojati dati još jedan prilog učvršćivanju korelacije matematike s drugim, u ovom slučaju ekonomskim, predmetima koje slušaju naši učenici i studenti.

Radi potpunosti, podsjetimo ukratko na osnovne veličine i relacije jednostavnoga kamatnoga računa. Neka je C početna vrijednost glavnice ukamaćene na ukupno n godina uz stalan godišnji kamatnjak p . Tada su ukupne kamate K koje done-se ta glavnica nakon isteka vremena ukamaćivanja jednake:

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100} \quad (1)$$

Napomena. U praksi je moguć i slučaj da se vremenska jedinica razdoblja na koje se odnosi kamatnjak ne podudara s vremenskom jedinicom razdoblja ukamaćivanja (npr. kad je kamatnjak godišnji, a vrijeme ukamaćivanja iskazano u mjesecima). U takvim se slučajevima računa dodatni parametar m definiran relacijom:

$$m = \frac{\text{jedinica za razdoblje na koje se odnosi kamatnjak}}{\text{jedinica za vrijeme ukamaćivanja}} \quad (2)$$

pa se tada relacija (1) zapisuje u obliku:

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100 \cdot m} \quad (3)$$

Npr. ako je nominalni kamatnjak p godišnji, a vrijeme ukamaćivanja n iskazano u mjesecima, onda je $m = 12$. U slučaju kad je vrijeme ukamaćivanja iskazano u danima postoje dvije mogućnosti: $m = 365$ (ako godina nije prijestupna) i $m = 366$ (ako je godina prijestupna). U ovom ćemo članku primjenjivati tzv. *bankarsko pravilo* koje pretpostavlja $m = 360$ (tj. da jedna godina ima 360 dana) i da se dani unutar godine obračunavaju prema kalendaru. Zainteresirani čitatelj detalje može naći u literaturi [1] ili [2].

Ovome dodajmo da smo se pri navođenju relacije (1) prešutno koristili pretpostavkom da se kamate obračunavaju tzv. *dekurzivnim načinom* obračuna kamata. Osnovno svojstvo toga obračuna kamata jest da se kamate obračunavaju na kraju vremena ukamaćivanja, i to na glavnici s početka toga razdoblja. Ovaj se način najčešće primjenjuje u gospodarskoj praksi¹, pa zbog toga navedenu pretpostavku nismo posebno istaknuli.

Objasnimo ukratko pojam zadužnice. U našoj gospodarskoj praksi taj se pojam češće rabi kao sinonim za izjavu o zapljeni računa, odnosno kao instrument za osiguranje naplate potraživanja. Međutim, u europskoj, a još više u američkoj gospodarskoj praksi, taj pojam označuje i vrijednosni papir s kojim se može trgovati kao i s npr. dionicama. Zaduznice se obično dijele na *kamatne* i *diskontne*. U ovom ćemo članku pod pojmom "zadužnica" podrazumijevati *kamatnu* zadužnicu jer se u pripadnom kamatnom računu primjenjuje već spomenuti dekurzivan obračun kamata².

Pojednostavnjeno rečeno, zadužnica je vrijednosni papir koji potpisuje dužnik prigodom posudbe novca od vjerovnika. Svaka zadužnica ima sljedeće osnovne elemente:

- *nominalna vrijednost* ili *glavnica* (iznos koji vjerovnik posuđuje dužniku);

- *ugovorno definirani (nominalni) kamatnjak*;
- *datum izdavanja*;
- *datum dospijeca*;
- *kolateral* (objekt zadužen u svrhu osiguranja povrata duga).

Dakle, na datum izdavanja zadužnice vjerovnik isplaćuje dužniku iznos glavnice navedene na zadužnici. Na datum dospijeca zadužnice dužnik isplaćuje vjerovniku iznos glavnice uvećan za iznos kamata. Ne isplati li dužnik vjerovniku svoj ukupni dug na datum dospijeca zadužnice, obračunavaju se zatezne kamate po posebnoj kamatnoj stopi. Takve slučajeve ovdje nećemo razmatrati.

Napomenimo još da je zadužnica tzv. *kratkoročni vrijednosni papir*, pa se obično izdaje na najviše godinu dana. To znači da se vrijeme između datuma izdavanja i datuma dospijeca zadužnice obično iskazuje ili u danima ili u mjesecima. Zbog toga se pri računanju kamata rabi relacija (3).

Ilustrirajmo ovako definiran "račun zadužnica" na primjerima.

Primjer 1. Tvrta *Spadalić-invest d.d.* iz Piškorevaca³ 1. 6. 2012. izdala je polugodišnju zadužnicu čija je nominalna vrijednost **100 000 kn** uz godišnji kamatnjak **6**. Koji će iznos (i kada) tvrtka morati platiti u svrhu vraćanja duga?

Prema ranije definiranim oznakama vrijedi: $C = 100\,000$ kn, $n = 0.5$ godina = 6 mjeseci i $p = 6$. Iznos ukupnih kamata možemo računati i prema relaciji (1) i prema relaciji (3), pri čemu u potonjoj dodatno odabiremo $m = 12$. Opredijelimo se za relaciju (1):

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100} = \frac{100\,000 \cdot 6 \cdot 0.5}{100} = 3000 \text{ kn.} \quad (4)$$

Dakle, navedena tvrtka će 1. 6. 2012. nakon prodaje zadužnice na tržištu kapitala dobiti od vjerovnika (kupca zadužnice) **100 000 kn**. Nakon isteka jednoga polugodišta, tj. 1. 12. 2012. tvrtka će platiti

¹ Alternativni način obračuna kamata je tzv. *anticipativni način* koji ovdje ne opisujemo.

² Detalji o njemu također se mogu naći u literaturi [1] i [2].

³ U kamatnom računu koji se odnosi na diskontne zadužnice primjenjuje se anticipativan način obračuna kamata.

⁴ Svi nazivi tvrtki potpuno su izmišljeni, dok su pripadni toponimi stvarni.

vjerovniku ukupno $C + K = 100\,000 + 3000 = 103\,000$ kn.

Primjer 2. Tvrtka *Propalić-trade d.d.* iz Špičkovine 1. 3. 2012. izdala je 100-dnevnu zadužnicu čija je nominalna vrijednost 90 000 kn uz godišnji kamatnjak 7.5. Koji će iznos (i kada) tvrtka morati platiti u svrhu vraćanja duga?

U ovome je slučaju $C = 90\,000$, $n = 100$ dana, $p = 7.5$ i $m = 360$. Iznos ukupnih kamata računamo koristeći se relacijom (3):

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100 \cdot m} = \frac{90\,000 \cdot 100 \cdot 7.5}{100 \cdot 360} = 1875 \text{ kn.} \quad (5)$$

Dakle, 1. 3. 2012. nakon prodaje zadužnice tvrtka će dobiti 90 000 kn. 100 dana poslije, tj. 9. 6. 2012. tvrtka će vjerovniku platiti ukupno $C + K = 90\,000 + 1875 = 91\,875$ kn.

Primjer 3. Poduzetnik Jure Mutikašić odlučio je kupiti zadužnicu čija je nominalna vrijednost 10 000 USD, a pripadni godišnji kamatnjak 7.2. Na koji najkraći rok (iskazan u mjesecima) treba biti izdana ta zadužnica tako da neto-dobit od ulaganja iznosi 120 USD?

Neto-dobit spomenuta u primjeru zapravo je iznos kamata koje će dužnik morati platiti vjerovniku. Stoga je $C = 10\,000$ USD, $p = 7.2$ i $K = 120$ USD. Traženo vrijeme n mora biti iskazano u mjesecima, pa odabiremo $m = 12$. Iz relacije (3) tada slijedi:

$$n = \frac{100 \cdot K \cdot m}{C \cdot p} = \frac{100 \cdot 120 \cdot 12}{10\,000 \cdot 7.2} = 2 \text{ [mjeseca]}. \quad (6)$$

Tijekom razdoblja na koje je izdana zadužnica vjerovnik je može prodavati drugim fizičkim ili pravnim osobama npr. radi podmirenja vlastitih dugova. Konkretno, promatramo sljedeći problem.

Problem 1. Pretpostavimo da vjerovnik posjeduje zadužnicu. Zaduznica ima nominalnu vrijednost C , datum izdavanja D_1 , godišnji kamatnjak p i datum dospijeća D_2 . Radi podmirenja vlastitih dugova, vjerovnik želi prodati tu zadužnicu na datum D (pri čemu vrijedi kronološka nejednakost $D_1 \leq D \leq D_2$). Toga je datuma na tržištu

kapitala važeća godišnja stopa vrijednosti novca $p_1\%$. Zanimljivo li dodatne pogodnosti kojima se može kompenzirati razlika u iznosu kamata, po kojoj najvećoj cijeni C_{max} vjerovnik može prodati tu zadužnicu?

Označimo:

$$d := D_2 - D_1, \quad (7)$$

$$d' := D_2 - D. \quad (8)$$

Te razlike datuma obračunavaju se prema kalendaru. Tako problem 1 postaje ekvivalentan sljedećem problemu:

Problem 2. Pretpostavimo da je glavnica C uložena na d dana uz stalan godišnji kamatnjak p . Neka je $d' \in [0, d]$. Odredimo glavnica C_1 koju treba uložiti na d' dana uz stalan godišnji kamatnjak p_1 tako da konačne vrijednosti obiju glavnica budu jednake.

Prema relaciji (3), konačna vrijednost glavnice C iznosi:

$$C_1 = C + K = C + \frac{C \cdot p \cdot d}{36\,000} = \left(1 + \frac{p \cdot d}{36\,000}\right) \cdot C. \quad (9)$$

Analogno, konačna vrijednost glavnice C_1 iznosi:

$$\begin{aligned} C'_1 &= C_1 + K = C_1 + \frac{C_1 \cdot p_1 \cdot d'}{36\,000} \\ &= \left(1 + \frac{p_1 \cdot d'}{36\,000}\right) \cdot C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Prema uvjetu problema 2, mora vrijediti jednakost:

$$C_1 = C'_1. \quad (11)$$

Izjednačavanjem desnih strana jednakosti (9) i (10) dobivamo:

$$\left(1 + \frac{p \cdot d}{36\,000}\right) \cdot C = \left(1 + \frac{p_1 \cdot d'}{36\,000}\right) \cdot C'. \quad (12)$$

Jednakost (12) je linearna jednadžba s jednom nepoznicom C' . Riješimo li je, dobijemo:

$$C' = \frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000 + p_1 \cdot d'}. \quad (13)$$

Budući da se u gospodarskoj praksi veličine C , p , d i p_1 zadaju unaprijed (prigodom izdavanja zadužnice, odnosno na datum njezine prijevremene prodaje), veličinu C' možemo shvatiti kao funkciju varijable d' . Stoga promotrimo funkciju $f : [0, d] \rightarrow \mathbf{R}$ definiranu propisom:

$$f(x) = \frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000 + p_1 \cdot x} \quad (14)$$

Svi parametri koji se pojavljuju u propisu (14) strogo su pozitivni, pa zaključujemo da je f neprekidna strogo padajuća razlomljena linearna funkcija. Ona poprima svoju najveću vrijednost u donjoj granici svoje domene, tj. za $x = 0$, i ta vrijednost jednaka je:

$$f_{\max} = \frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000} \stackrel{\text{prema (8)}}{=} C_1. \quad (15)$$

Funkcija poprima svoju najmanju vrijednost u gornjoj granici svoje domene, tj. za $x = d$, i ta vrijednost jednaka je:

$$f_{\min} = \frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000 + p_1 \cdot d}. \quad (16)$$

Iz jednakosti (15) slijedi da se vjerovniku najviše isplati ne prodavati zadužnicu prije njezina datuma dospelja. Takav smo rezultat mogli i unaprijed očekivati.

Praktično zanimljivija je jednakost (16). Iz nje slijedi da na datum izdavanja zadužnice ugovorni kamatnjak treba biti barem jednak godišnjoj stopi vrijednosti novca važećoj na taj datum. Naime, ako bi vrijedila nejednakost $p < p_1$, tada iz jednakosti (16) izravno slijedi:

$$f_{\min} < C. \quad (17)$$

U tom slučaju možemo zaključiti da bi najveća cijena po kojoj bi vjerovnik mogao prodati zadužnicu na njezin datum izdavanja (a vrlo vjerojatno i koji dan poslije) bila strogo manja od iznosa kojim je vjerovnik platio zadužnicu. Tako bi si vjerovnik u određenom razdoblju nakon kupnje zadužnice stvorio gubitak u trgovanju zadužnicom. (Što je omjer $\frac{p}{p_1}$ manji, navedeno razdoblje je duže.) Zbog toga se u praksi primjenjuje dodatni zahtjev $p > p_1$ kako bi se uopće mogla ostvariti prodaja zadužnice.

Pokažimo primjenu provedenoga razmatranja na dvama primjerima.

Primjer 4. Tvrtka *Prepredenjaković-trade d.o.o.* iz Frkljevaca kupila je 80-dnevnu zadužnicu na dan izdavanja zadužnice 1. 6. 2012. Zaduznica ima nominalnu vrijednost 199 650 kn i ugovorni godišnji kamatnjak 12. Ako tvrtka prijevremeno proda zadužnicu 1. 7. 2012. po najvećoj mogućoj cijeni i uz godišnju stopu vrijednosti novca 10%, koliku će dobit ostvariti navedenim dvjema transakcijama na tržištu kapitala? Kolika bi bila ta dobit ako tvrtka ne bi prodavala zadužnicu?

Iz teksta primjera proizlazi $C = 199\,650$ kn, $p = 12$, $d = 80$, $p_1 = 10$ i $d' = 1.7 - 1.6 = 30$ dana. Prema relaciji (13), najveća moguća cijena po kojoj tvrtka može prodati zadužnicu 01. 07. 2012. iznosi:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000 + p_1 \cdot d'} \\ &= \frac{(36\,000 + 12 \cdot 80) \cdot 199\,650}{36\,000 + 10 \cdot 30} = 203\,280 \text{ kn.} \end{aligned} \quad (18)$$

Dakle, tvrtka je kupila zadužnicu po cijeni od 199 650 kn, a prodala po cijeni od 203 280 kn. Navedenim dvjema transakcijama tvrtka je ostvarila dobit od $203\,280 - 199\,650 = 3\,630$ kn.

Da tvrtka nije prodala zadužnicu, njezina bi dobit bila jednaka iznosu kamata na glavicu od 199 650 kn uz godišnji kamatnjak 12 i vrijeme ukamčivanja 80 dana. Prema relaciji (3), taj je iznos jednak:

$$K = \frac{C \cdot p \cdot d}{36\,000} = \frac{199\,650 \cdot 12 \cdot 80}{36\,000} = 5324 \text{ kn.} \quad (19)$$

Primjer 5. Tvrtka *Čifta-promet d.o.o.* posjeduje 90-dnevnu zadužnicu. Nominalna vrijednost zadužnice je 100 000 kn, ugovorni godišnji kamatnjak jednak je 10, a datum izdavanja zadužnice je 1. 9. 2012. Kada najranije tvrtka može prodati tu zadužnicu po najvećoj mogućoj cijeni na dotični datum i uz godišnju stopu vrijednosti novca od 9%

tako da dobit nastala držanjem zadužnice u portfelju tvrtke iznosi najmanje 1000 kn?

Iz podataka u zadatku proizlazi $C = 100\,000$ kn, $p = 10$, $d = 90$ i $p_1 = 9$. Iz uvjeta da ukupna dobit mora iznositi najmanje 1000 kn, zaključujemo da najveća moguća cijena po kojoj je tvrtka prodala zadužnicu mora biti barem $C + 1000 = 100\,000 + 1000 = 101\,000$ kn, tj. mora vrijediti nejednakost:

$$C' \geq 101\,000, \quad (20)$$

odnosno, zbog relacije (13), ekvivalentna nejednakost:

$$\frac{(36\,000 + p \cdot d) \cdot C}{36\,000 + p_1 \cdot d'} \geq 101\,000. \quad (21)$$

U tu jednakost uvrstimo zadane numeričke vrijednosti parametara, pa dobivamo linearnu nejednadžbu s nepoznanicom d' :

$$\frac{(36\,000 + 10 \cdot 90) \cdot 100\,000}{36\,000 + 9 \cdot d'} \geq 101\,000 \quad (22)$$

Rješavanjem ove nejednadžbe dobijemo:

$$d' \leq \frac{6\,000}{101} \approx 59.4. \quad (23)$$

Prema relaciji (8), to znači da od *datuma prodaje* do *datuma dospijeca zadužnice* treba proteći najviše 59 dana. (Zaokruživanje naviše uvijek smanjuje neto-dobit jer je razdoblje od trenutka izdavanja do trenutka prijevremene prodaje kraće, pa su i pripadne kamate manje.) Stoga zaključujemo da od *datuma izdavanja* do *datuma prodaje* zadužnice mora proteći najmanje $90 - 59 = 31$ dan, pa tvrtka treba prodati zadužnicu najranije 1.9.2012. + 31 = 2.10.2012.

Iz navedenih je primjera razvidno da se u "računu zadužnica", osim poznavanja osnovnih veličina i relacija jednostavnoga kamatnog računa, zahtijeva i točna *interpretacija* dobivenih rezultata. Time se učenike i studente želi potaknuti na razmišljanje o svrsi svakoga pojedinoga izračuna i zaključivanje što točno znači svaki pojedini rezultat, a ne samo na "puku" primjenu osnovnih formula i računanje pomoću kalkulatora. Smatramo da takvih tema u okviru srednjoškolske i visokoškolske matematike nema dovoljno. Iako joj to ne pripada u osnovne svrhe, tema može korisno poslužiti i kao svojevrsno ponavljanje gradiva koje se polaže na objema razinama državne mature (izražavanje jedne veličine iz zadane relacije, odnosno rješavanje linearnih (ne)jednadžbi s jednom nepoznanicom).

LITERATURA

- 1/ B. Gruić, I. Jemrić, I. Šutalo, H. Volarević, *Matematika za ekonomiste i managere*, MATE, Zagreb, 2006.
- 2/ V. Erceg, *Metode gospodarskog računa*, Element, Zagreb, 2009.
- 3/ B. Kovačić, B. Radišić, *Gospodarska matematika* (zbirka zadataka s CD-om), Školska knjiga, Zagreb, 2011.
- 4/ B. Relić, *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2002.
- 5/ Đ. Salamon, B. Šego: *Matematika 3*, udžbenik sa zbirkom zadataka, Alka script, Zagreb, 2010.
- 6/ K. Šorić, *Matematika 3*, udžbenik sa zbirkom zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2011.