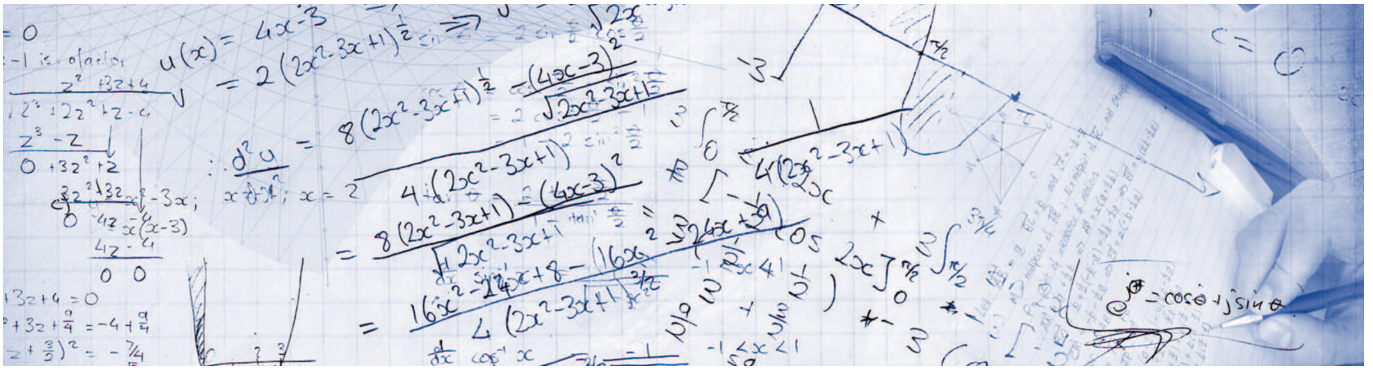
Nejednakost
između aritmetičke i geometrijske sredine ipak nije svemoćna

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina



Nejednakosti između brojnih sredina veoma su važne u matematici. Tu se naročito ističe nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine n pozitivnih brojeva koja glasi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n};$$
$$(a_i > 0,\ i = 1, \ldots n) \qquad (1)$$

gdje znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Mnoge algebarske i geometrijske nejednakosti efikasno se dokazuju pomoću nejednakosti (1). No sada ćemo dati jedan primjer nejednakosti koju ne možemo dokazati direktno pomoću (1), a možemo veoma elegantno na više drugih načina.

Riječ je o nejednakosti

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c), \qquad (2)$$

gdje su $a, b, c > 0$.

Dokaz. Očigledno, nakon dijeljenja dane nejednakosti sa $abc > 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a + b + c. \qquad (3)$$

Pokušajmo sada dokazati nejednakost (3).

Na osnovi nejednakosti (1), između aritmetičke i geometrijske sredine za $n = 3$, dobivamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{b}},$$

odnosno

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc}.$$

Ako vrijedi sada nejednakost

$$3 \cdot \sqrt[3]{abc} \geq a + b + c, \qquad (4)$$

vrijedila bi i nejednakost (3), tj. dana nejednakost (2) bila bi dokazana.

Nažalost, iz nejednakosti (4) slijedi:

$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt[3]{abc},$$

a ova nejednakost nije točna jer na osnovi (1) za $n = 3$ vrijedi:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Eto, nejednakost (1) ne daje dokaz nejednakosti (3), odnosno dane nejednakosti (2).

Sada ćemo dati jedan veoma elegantan dokaz nejednakosti (3). Imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = \\
&= \frac{a^2+c^2-c^2}{c} + \frac{b^2+a^2-a^2}{a} + \frac{c^2+b^2-b^2}{b} \\
&= \frac{a^2+c^2}{c} + \frac{b^2+a^2}{a} + \frac{c^2+b^2}{b} - (a+b+c) \\
&\geq \frac{2ac}{c} + \frac{2ab}{a} + \frac{2bc}{b} - (a+b+c) \\
&= 2a+2b+2c-(a+b+c) \\
&= a+b+c,
\end{aligned}$$

tj. nejednakost (3) je dokazana.

Ovdje smo se koristili nejednakošću

$$x^2+y^2 \geq 2xy; \quad (x,y \in \mathbf{R})$$
$$\left(\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0\right).$$

Ustvari, možemo reći da je to ipak nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (2) za $n = 2$ i $x, y > 0$. Dakle, i nejednakost (2) je točna, gdje vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b = c$.

Sada ćemo dati još jedan dokaz nejednakosti (2) primjenom Cauchy-Bunyakovsky-Schwarzove nejednakosti koja glasi:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$
$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2), \tag{5}$$

gdje $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots n$ i vrijedi jednakost ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Mi ćemo se koristiti nejednakošću (5) za $n = 3$, tj.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2). \tag{6}$$

Stavljajući u (6) da je $a_1 = \sqrt{c}$, $a_2 = \sqrt{a}$, $a_3 = \sqrt{b}$, $b_1 = \sqrt{a^3b}$, $b_2 = \sqrt{b^3c}$, $b_3 = \sqrt{c^3a}$, imamo:

$$\left(\sqrt{a^3bc} + \sqrt{ab^3c} + \sqrt{abc^3}\right)^2$$
$$\leq (a+b+c)(a^3b + b^3c + c^3a),$$

odnosno

$$(\sqrt{abc})^2(a+b+c)^2 \leq (a+b+c)(a^3b+b^3c+c^3a),$$

tj.

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c),$$

a ovo je nejednakost (2) koju je trebalo dokazati.

Na kraju ćemo dati još jedan dokaz nejednakosti (3), odnosno (1) uz pomoć nejednakosti (vidi [2], str. 53–60) koja glasi:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}, \tag{7}$$

gdje su $x_i > 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ustvari, koristit ćemo se nejednakošću (7) za $n = 3$:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \frac{a_3^2}{x_3} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{x_1+x_2+x_3}. \tag{8}$$

Stavljajući u (8) da je $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $x_1 = c$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, dobivamo:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{c+a+b},$$

tj.

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a+b+c,$$

a ovo je nejednakost (3).

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

2/ Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.