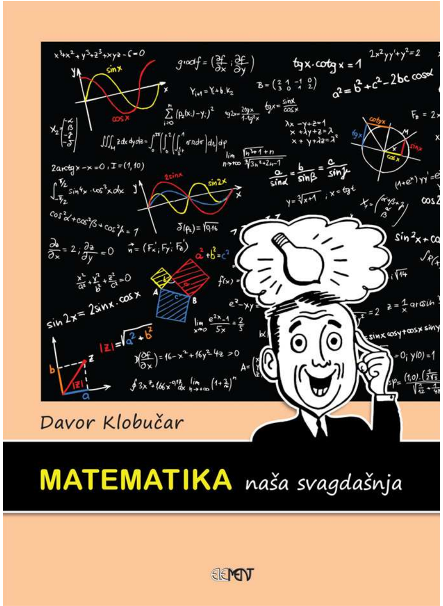
Matematika naša svagdašnja

Davor Klobučar, Osijek



Nedavno je u izdanju Elementa objavljena nova knjiga pod naslovom *Matematika naša svagdašnja* (vidjeti na `www.element.hr`). U njoj se na više od 700 stranica mogu pronaći problemi iz klasičnih matematičkih područja: aritmetike, geometrije, algebre, teorije skupova, kombinatorike, pa čak i teorije grafova i matematičke analize, te s druge strane, iz egzotičnih područja kao što su matematički trikovi, praktični problemi kod mjerenja, financijska matematika, računi u astronomiji i razne mozgalice. Pročitajte nekoliko odabranih problema iz čitave hrpe matematičkih i logičkih zadataka, od kojih su jedni zanimljivi, drugi poučni, treći zabavni, a mnogi su sve to istovremeno!

More u vlastitom domu. Morska voda je ljekovita, oko toga se svi slažu. Ali što ako živite daleko od mora? Onda biste mogli napraviti morsku vodu metodom *sam svoj majstor*! Jednostavno kupite kilogram morske soli (to je standardna kutija u trgovinama) i, umjesto da je pojedete, otopite tu sol u velikoj posudi s vodom. Pitanje glasi: koliko je soli potrebno za jedan kubni metar vode? Kilogram ili čak dva? Hajdemo izračunati!

Prosječna slanost Jadranskog mora je 38 promila. To znači da $1000\,\mathrm{kg}$ morske vode sadržava $38\,\mathrm{kg}$ soli. Kocka veličine $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$ isto je što i $10\,\mathrm{dm} \times 10\,\mathrm{dm} \times 10\,\mathrm{dm}$, tj. $1000\,\mathrm{dm}^3$. Litra nije ništa drugo negoli svakodnevna riječ za $1\,\mathrm{dm}^3$. Dakle, kocka s bridom $1\,\mathrm{m}$ sadržava 1000 litara, što i nije tako puno vode. Litra vode, bilo morske, bilo obične, ima masu od približno $1\,\mathrm{kg}$. Znači, u toj kocki ima $1000\,\mathrm{kg}$ morske vode, a to je $38\,\mathrm{kg}$ soli. Morali bismo kupiti čak 38 kutija soli i sve to sasuti u tu kocku, a ostatak napuniti čistom vodom. Vjerujem da niste ni slutili u koliko se jakoj otopini kupate na ljetovanju!

Jedan trijezan dobro dođe. Društvo matematičara je u kafiću *Kod veselog integrala* proslavljalo polaganje doktorata jednog njihova člana. Vidjevši da je uzvanika na slavlju mnogo i da se naručivalo mnogo raznih pića, a i raspoloženje je bilo na visini, konobaru se učinilo da je to savršena prilika da se i on malo okoristi. Ta ako na kraju večeri zaračuna veći iznos novca, nitko neće ništa posumnjati, a razlika ide njemu u džep.

Matematičari su tako popili 12 piva, 18 sokova, 3 boce vina i 2 litre gazirane vode. Glavni slavljenik nažalost nije se osjećao dobro pa je povrh svega toga naručio za sebe još 1 litru obične vode, koja stoji jednako kao i gazirana voda. Konobar je na kraju donio račun koji je iznosio točno 520 kuna. Napominjem da su sve cijene prirodni brojevi!

Na to ustade slavljenik (koji je pio samo vodu!) i reče: "Ovaj račun nije u redu!"

Konobar se začudi: "Ali, gospodine, kako to možete tvrditi? Ta vi niste ni pogledali stavke računa, a ionako ne znate ni cijene!" Slavljenik odgovori: "Svejedno znam, ipak sam ja matematičar, brojevi su moja struka!" Na kraju je račun pregledan i stvarno je ustanovljena pogreška. Naravno, pogreška u korist konobara. Kako to?

Iako ne znamo jedinične cijene piva, soka ili vina, mi te cijene moramo množiti s naručenom količinom, a ona je svaki put djeljiva sa 3. Onda će i cjelokupni dio računa za pivo, sok i vino biti djeljiv sa 3. Doduše, gazirane vode imamo u količini 2, ali obična voda stoji jednako kao i gazirana pa je taj dio računa isti kao da smo naručili 3 gazirane vode i nijednu običnu. Dakle, i ta se cijena množi sa 3. Kad zbrojimo sve te brojeve koji su djeljivi sa 3, tada i suma mora biti djeljiva. Međutim, 520 nije djeljiv sa 3 i to je naš slavljenik odmah primijetio!

Tko će više upamtiti? Budući da ljudi na svijetu ima barem 6 milijardi (2011.), onda ćete za svaku stvar koja vam padne na pamet uvijek naći dovoljno pristalica.

Npr., ako osnujete novu religiju ili ako preko interneta zamolite milijun ljudi da vam daruju svaki po 1 kunu za kupovinu vašeg mercedesa... Tako se razvio i jedan pravi sport čiji je cilj pamćenje što više decimala broja π! To se na engleskom zove *piphilology*, a na njemačkom *Pi-Sport*. Autor ove knjige pošteno priznaje da nije nikad naučio više od 17 decimala, niti ima namjeru.

Svjetski rekord u pamćenju decimala broja π drži Lu Chao koji je 2006. godine kao 24-godišnji kineski student izrecitirao 67 890 decimala, da bi u sljedećoj načinio pogrešku. Šteta, jer se pripremio da ih izrecitira punih 100 000. Izgovaranje ovog broja trajalo je 24 sata i 4 minute. Time je on ušao u Guinessovu knjigu rekorda.

Lu Chao je učio ovaj broj oko dvije godine, a posljednjih je mjeseci svakodnevno potrošio oko deset sati na ponavljanje i vježbanje. Navodno je rekao kako je Zu Chongzi, drevni kineski matematičar, otkrio razlomak koji odlično prikazuje omjer opsega i promjera kruga, pa je prema tome red da i u ovom sportu rekorder bude jedan Kinez!

Slično, ali različito! Radi boljeg isticanja pouke iz prethodnog zadatka, pogledajmo sljedeće dvije jednadžbe:

$$x + 1 = 1 \qquad\qquad x + \frac{x}{x} = 1.$$

Naizgled je to jedno te isto jer izraz $\frac{x}{x}$ kratimo i dobijemo 1, pa bi rješenje obiju jednadžbi bilo $x = 0$. Ali druga jednadžba nije definirana baš za taj x jer u nazivniku ne smije biti nula. Stoga $x = 0$ nije njezino rješenje! A množenjem sa x i sređivanjem uvjerit ćemo se da ona nema ni drugih rješenja. Rješenje prve jednadžbe očigledno je samo $x = 0$.

Specijalitet kuće. Riješimo sljedeću tešku jednadžbu:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^{-6}}} - \frac{\left|x^2+1\right| - 1}{\cos^2 x + \ln e \cdot \sin^2 x} = \frac{16!}{(16-1)!}\,.$$

Uz tolike raznovrsne funkcije sadržane u njoj, moram se našaliti i reći: "Ovo bi bila prilično teška jednadžba kad ne bi bila tako lagana!"

Kad sredimo potencije, lijevi razlomak nije ništa drugo nego $2x^2$. U srednjem razlomku odmah znamo da je $\ln e = 1$, pa cijeli nazivnik postaje $\cos^2 x + \sin^2 x$. To je jednako 1, pa nazivnik možemo u potpunosti obrisati! U brojniku je modul od uvijek pozitivnog broja (jer je već i sam $x^2 \geq 0$). Stoga modul brišemo i jedinice se pokrate pa je cijeli razlomak tek običan x^2, kao i cijela lijeva strana jednadžbe.

Desna strana je 16 i sve se svodi na $x^2 = 16$, odnosno $x = 4$ i $x = (-4)$.

Ako piješ, ne vozi! Ako je točna tvrdnja da 40% svih prometnih nesreća prouzrokuju pijani vozači, što iz toga možemo zaključiti? Kao prvo, to znači da su ostalih 60% nesreća prouzročili oni trijezni. Budući da je 60% veći broj nego 40%, znači li to da su trijezni vozači opasniji? Tj., da prije vožnje obavezno trebate popiti alkoholno piće jer ćete tako smanjiti mogućnost nesreće?

Ovdje je pogreška u definiciji pojma sigurnosti. Ne trebamo gledati koliko nesreća otpada na pojedinu od te dvije skupine vozača. One se znatno razlikuju po svojoj brojnosti pa trebamo gledati koliko nesreća otpada na istu količinu pojedinaca iz svake od tih skupina!

Naime, od 1000 vozača koji su u jednom trenutku na cesti možda je svega 10 njih s većim postotkom alkohola od dopuštenog. Ako je nastalo 10 nesreća i ako su 40% tih nesreća prouzrokovali pijani vozači, to bi bile ukupno 4 nesreće. A preostalih 6 prouzrokovali su trijezni vozači. U takvom bi slučaju naša tvrdnja o 40% bila točna, ali što to govori o sigurnosti?

To znači da je 10 pijanih vozača uzrokovalo 4 nesreće, a njih čak 990 trijeznih uzrokovalo je preostalih 6 nesreća. Dakle jedan je pijani vozač u prosjeku napravio 0,4 nesreće, a jedan trijezni 0,00606 nesreća. Radi bolje vidljivosti uzmimo uzorak ne od 1 osobe, nego od 1000. To znači da bi u prosjeku 1000 pijanih osoba uzrokovalo 400 nesreća, a 1000 trijeznih samo 6 nesreća. A kad bi takvi hipotetski podaci bili točni, ne samo da trijezni ne bi bili opasniji, nego bi pijani bili opasniji $400 : 6 \approx 66$ puta!

Igra *Hop!* Sljedeća igra pokazat će kako vas matematika može zabaviti i bez papira i olovke. Nekoliko ljudi sjedne u krug i počnu nizati brojeve. Prvi kaže 1, drugi kaže 2, treći 3 i tako u krug. Pritom se dogovore da se za brojeve koji su djeljivi sa 3 ne smije reći sam taj broj, nego se mora reći: “Hop!” Dakle, čuje se ovo: “1, 2, hop, 4, 5, hop. . . ” Govoriti treba što brže jer kad netko predugo razmišlja, kvari se atmosfera igre. Ako netko pogriješi, on ispada ili bude nekako kažnjen, a igra se može igrati ispočetka ili nastaviti.

Ako ima samo 3 igrača ili je broj igrača djeljiv sa 3, onda će neki ljudi svaki put govoriti “hop!” i ništa drugo. Oni neće morati razmišljati. Da bi igra bila pravednija i zanimljivija, može se dogovoriti da se “hop!” kazuje na višekratnike broja 4 ili 5 ili drugog broja.

Nakon što se igrači izvješte, mogu prije svake igre dogovarati nova i sve složenija pravila.

Npr., treba reći “hop!” umjesto broja koji je djeljiv sa 3 ili 5. Može se zadati da kritični brojevi budu oni koji su djeljivi sa 4 ili imaju u sebi znamenku 3. Taj slučaj je zanimljiv kad se dođe do 30. Tada 10 uzastopnih brojeva (30–39) imaju u sebi znamenku 3, pa igrači jedno vrijeme stalno govore “hop!” i moraju u sebi dobro brojiti da se ne izgube! Možda bi bilo dobro da jedna osoba ne igra, nego bude sudac?

Pravila igre svaki se put mogu dogovorom mijenjati. Pa ni prvi igrač ne mora biti uvijek isti. A može se dogovoriti i šaljiva kazna: da igrač koji pogriješi dobiva redom slova od riječi *magarac*; dakle da nakon prve pogreške ima *m*, nakon druge *ma*, zatim *mag* i tako redom. Nakon 7 pogrešaka on dobija titulu *magarac*!

Ljubitelji matematike moći će osim kombinacija nekih djeljivosti i nekih znamenaka uključiti u igru i proste brojeve, kvadrate i kubove i slično. A ekstremni matematičari mogu govoriti “hop!” i ako je suma znamenaka djeljiva sa 7 ili broj spada u savršene brojeve, ili je jedan od susjednih brojeva prost, ili je razlika znamenaka 5, ili čak suma znamenaka od sume znamenaka = 4 itd. Mogućnosti su beskrajne!

Prosječna brzina. Čovjek pretrči neki put brzinom od $6\,\mathrm{km/h}$, a zatim se vrati na polaznu točku hodajući polagano brzinom od $4\,\mathrm{km/h}$. Koja mu je prosječna brzina tijekom tog kretanja?

Zdrav razum rekao bi nam da je prosječna brzina $5\,\mathrm{km/h}$ jer su obje dionice puta jednako dugačke. Ali ipak nije tako! Prosječna brzina je ukupan put podijeljen s ukupnim vremenom. Ako je put bio p, onda je ukupan put $2p$. Vrijeme trčanja je $\frac{p}{6}$, a vrijeme hodanja $\frac{p}{4}$. Stoga je ukupno vrijeme bilo

$$\frac{p}{6}+\frac{p}{4}=\frac{5p}{12}.$$

Prosječna brzina je

$$2p : \frac{5p}{12} = \frac{24}{5} = 4,8\,\mathrm{km/h}.$$

Kada bi prosječna brzina bila $5\,\mathrm{km/h}$? Samo ako je kretanje od $6\,\mathrm{km/h}$ *vremenski* (a ne *putno*!) jednako trajalo kao i kretanje od $4\,\mathrm{km/h}$.

Pali-gasi! U hodniku imate tri prekidača za struju: A, B i C. Jedan od njih pali žarulju u susjednoj sobi, a druga dva prekidača ne rade ništa, oni su "lažnjaci". Zadatak vam je da nekim dosjetljivim sustavom paljenja i gašenja prekidača ustanovite koji od njih pali žarulju u spomenutoj sobi.

Soba je inače zatvorena i nikako se ne može vidjeti gori li svjetlo sve dok se ne uđe u nju. Ali kad ste ušli u sobu, gubite pravo na naknadnu manipulaciju prekidačima. Umjesto toga, morate ubrzo po ulasku izjaviti koji je prekidač pravi!

Dakle, kakav bi to bio sustav paljenja i gašenja koji bi vam u svakom slučaju omogućio da otkrijete pravi prekidač?

Odgovor. Uključili biste prekidač A, pričekali 1 minutu, isključili ga i zatim uključili prekidač B. Potom ulazite u sobu i pogledate žarulju. Ako svijetli, odgovor je B. Ako ne svijetli, opipate je li vruća! Ako je vruća, odgovor je A, inače C. Ovaj zadatak zbunio je mnoge, ali čim su dobili naputak da se ne moraju oslanjati samo na osjetilo vida, većina njih odmah se dosjetila!

Za napredne čitatelje postoji i varijanta sa 5 prekidača! Prekidač A držimo uključenim 15 dana, prekidač B 15 minuta, a C 15 sekundi. Potom uključimo D i uđemo u sobu. Ako žarulja svijetli, odgovor je D. Ako ne, imamo 4 mogućnosti. Hladna žarulja znači E, lagano topla C, jako vruća B, a pregorjela žarulja znači A!

Otvori-zatvori! Direktor jedne matematičke gimnazije bio je jako čudan čovjek. Za prvi dan nastave osmislio je neobičnu cerememononiju. Školska garderoba imala je 1000 ormarića, a isto toliko je bilo i učenika. On je odabrao jednog učenika i naredio mu da ide redom pored ormarića (koji su u početku svi bili zatvoreni) i da otvori svaki od njih. Zatim je naredio drugom učeniku da krene za prvim i svaki drugi ormarić zatvori. Potom je treći učenik dobio naredbu da stane kraj svakog trećeg ormarića i da ga zatvori ako je bio otvoren odnosno da ga otvori ako je bio zatvoren. Četvrti je učenik isto morao učiniti sa svakim četvrtim ormarićem, i tako redom sve do tisućitog učenika. Pitanje glasi: koliko će ormarića na kraju ceremonije biti otvoreno i koji su to?

Svaki će ormarić biti tretiran toliko puta koliko njegov redni broj ima djelitelja. Npr., ormariću broj 35 pristupit će učenici s rednim brojem 1, 5, 7 i 35. Budući da ih ima 4, a to je paran broj, ormarić ostaje u prvobitnom stanju, tj. zatvoren. Otvoreni će biti, dakle, samo oni ormarići kojima redni broj ima neparan broj djelitelja. A koji su to brojevi?

Kod prirodnih brojeva djelitelje možemo grupirati u parove. Npr., $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$. Ili $40 = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$. Na prvi pogled svaki bi broj imao paran broj djelitelja. Ali iznimka su potpuni kvadrati. Npr., $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$ ili $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$. Ne možemo kod $3 \cdot 3$ (ili $4 \cdot 4$) taj faktor 3 (ili 4) brojiti dvostruko. Stoga jedino potpuni kvadrati imaju neparan broj djelitelja. I jedino će takvi ormarići ostati otvoreni. Kako je $\sqrt{1000} \approx 31,6$, otvorenih ormarića treba biti 31.

Računanje prstima. Postoji nekoliko trikova koji se odnose na osnovne računske operacije pomoću prstiju dviju ruku. Ti računi vrijede samo za neke male brojeve i zapravo se mogu lakše izvoditi napamet. Stoga ovi trikovi više služe za zabavu, nego što daju neku praktičnu korist.

Jedan posebno simpatičan trik je množenje 1-oznamenkastog broja sa 9. Recimo da treba pomnožiti $4 \cdot 9$. Ispružite obje ruke na stol ispred sebe tako da prsti čine jedan niz od 10 članova. Budući da množimo sa 4, onda četvrti prst slijeva savijemo prema dolje tako da se on ne vidi. Sada pogledamo koliko je prstiju lijevo od njega – ima ih 3. Potom pogledamo koliko je ispruženih prstiju desno od njega – ima ih 6. Očitamo to kao dvoznamenkast broj, dakle 36, a to je ispravan rezultat. Ovo se lako provjeri za bilo koji množitelj od 1 do 10.