Nekoliko matematičkih igara

Branimir Dakić, Zagreb

Često se čuje kako je jedan od djelotvornijih i učinkovitijih načina učenja – učenje kroz igru. Dobro osmišljeno ono je opće prihvaćeno u početnoj nastavi matematike, manje je zastupljeno u predmetnoj nastavi osnovne škole, a gotovo da ga nema u srednjoškolskoj nastavi. Možda se drži kako je to uzrast koji je prerastao ovakav oblik rada. Pogrešno!

Nema toga uzrasta, čak ni odraslog, koji nije sklon igri. *Privlačnost igara i zagonetki je bezvremenska i univerzalna*, stoji na poleđini knjige *Games and Mathematics* engleskog matematičara Davida Wellsa, koji je bio šahovski prvak Velike Britanije za uzrast do 21 godine, a u misaonoj igri Go je na amaterskoj ljestvici nositelj 3. dana. Možda nije naodmet spomenuti kako riječ *play* potječe od staroengleskog *plegian* i ima značenje vježba, rekreacija, a također i izvođenje (glazbe) s naglašenim socijalnim smislom. Riječ *game* je također izvorno staroengleska riječ *gamen* što znači veselje, šala, zabava, razonoda pri čemu i ona ima jasnu socijalnu konotaciju.

Igra kao didaktički postupak mora biti primjerena i dobro organizirana. Kako organizirati igru? Hoće li to biti individualni rad, rad u parovima ili skupinama ili će se igra odvijati frontalno s cijelim razredom, pitanje je na koje će se odgovoriti ovisno o pravilima igre ali i uvjetima u kojima se odvija nastava. Igra će našu nastavu učiniti dinamičnijom, raznovrsnijom, zanimljivijom a pridonijeti će i većoj motivaciji za učenjem matematike.

Zbog čega ne bismo i učenicima srednje škole ponudili da kroz igru ponove, utvrde ili uvježbaju neko gradivo? Ovom malom prilogu nije svrha potanje razglabati o mjestu i ulozi igre u učenju matematike već ponuditi nekoliko igrica uz teme u 2. razredu srednje škole.

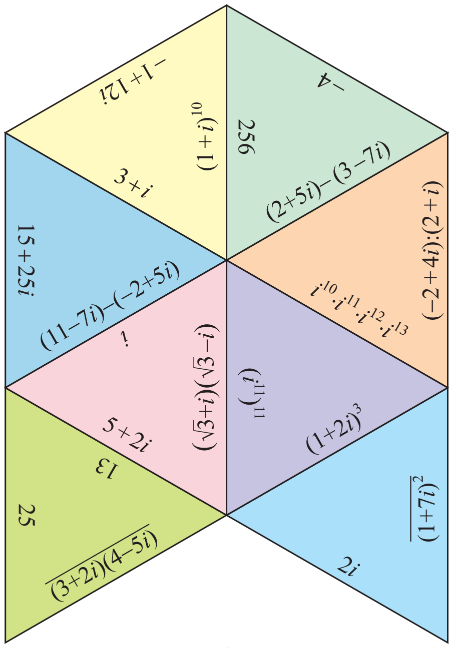
Labirint

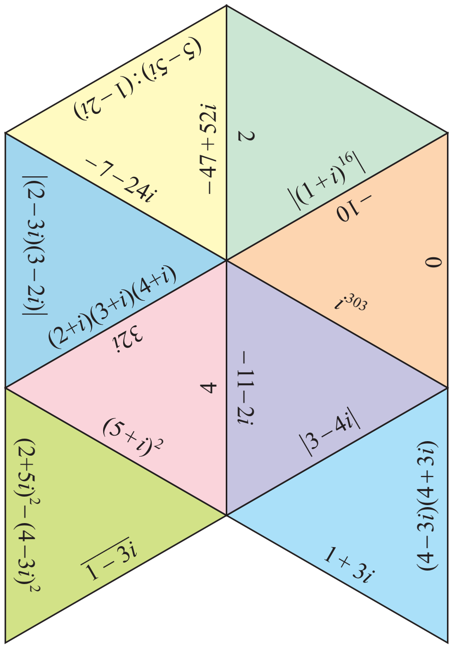
Ova vrlo jednostavna igrica može poslužiti kao kratak uvod pri obradi skupa kompleksnih brojeva. Uz to što se ponavlja razumijevanje pojmova *racionalan, iracionalan* i *realan broj*, uvode se i brojevi koji nisu realni. Priredimo tablicu u čija polja unesemo neke racionalne i iracionalne *nerealne* brojeve. Zadatak je proći uzastopce poljima tablice iz donjeg lijevog do gornjeg desnog ugla i to tako da put prolazi pločicama (poljima) na kojima su upisani isključivo racionalni brojevi. Svaki se korak mora opravdati, mora se obrazložiti zbog čega smo zakoračili upravo na tu, a ne na neku drugu pločicu. Na kraju, nakon prijeđenog puta dobro je prokomentirati i zapise na pločicama koje nismo dotaknuli. Na slici vidimo jednu mogućnost, jednu tablicu pri čemu je rješenje put u kojem su racionalni brojevi ispisani crvenom bojom na bojenoj podlozi.

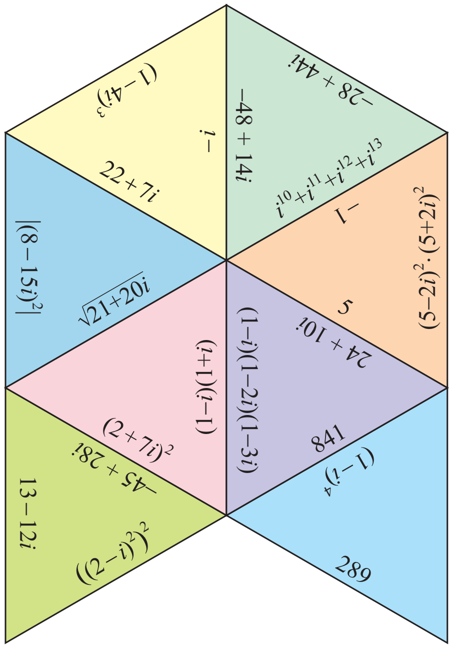
3π	$1.2345\ldots$	$\sqrt[3]{0.08}$	$\sqrt{2.25}$	0.7
$\sqrt{\pi^2}$	$\sqrt{0.121}$	$(\sqrt{2})^3$	$\sqrt[5]{-243}$	$\sqrt[4]{-625}$
$\sqrt{1000}$	$-\sqrt{0.01}$	0	$3.1\dot{4}$	$\sqrt{4}-\sqrt{2}$
$\dfrac{0.\dot{3}}{3}$	-1.001	$\dfrac{\pi}{3.14}$	$\sqrt{-400}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Puzzle

Ovu slagalicu slažemo nakon što smo obradili temu *Kompleksni brojevi*. Tri priložene "palete" valja kopirati na tvrđi karton. Neka format bude veći nego što je ovdje u prilogu. Zatim "palete" razrežemo te tako dobijemo 24 jednakostranična trokuta. Uz rubove (stranice) tih trokuta upisano je 30 jednostavnih zadataka iz područja kompleksnih brojeva te rješenja tih zadataka. Slagalica se slaže tako da se spoje stranice dvaju trokuta koje uz jednu stranu sadrže zapis zadatka, a uz drugu zapis njegova rješenja. Tako će se na kraju dobiti veliki pravilni šesterokut.







Evo i tablice sa svim zadatcima i njihovim rješenjima:

1.	$\overline{1 - 3i}$	$1 + 3i$
2.	$(4 - 3i)(4 + 3i)$	25
3.	$\lvert 3 - 4i \rvert$	5
4.	$(5 + i)^2$	$24 + 10i$
5.	$(1 + i)^{10}$	$32i$
6.	i^{303}	$-i$
7.	$(2 + i)(3 + i)(4 + i)$	$15 + 25i$
8.	$\lvert (2 + 3i)(3 - 2i) \rvert$	13
9.	$(5 - 5i) : (1 - 2i)$	$3 + i$
10.	$(1 + 2i)^3$	$-11 - 2i$
11.	$(i^{11})^{11}$	i
12.	$(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)$	4
13.	$(2 + 5i)^2 - (4 - 3i)^2$	$-28 + 44i$
14.	$(1 - i)^4$	-4
15.	$(2 + 7i)^2$	$-45 + 28i$
16.	$(-2 + 4i) : (2 + i)$	$2i$
17.	$(1 - 4i)^3$	$-47 + 52i$
18.	$\lvert (8 - 15i)^2 \rvert$	289
19.	$\sqrt{21 + 20i}$	$5 + 2i$
20.	$i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}$	0
21.	$\lvert (1 + i)^{16} \rvert$	256
22.	$((2 - i)^2)^2$	$-7 - 24i$
23.	$(1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i)$	-10
24.	$(2 + 5i) - (3 - 7i)$	$-1 + 12i$
25.	$(3 + 2i)\bar{(}4 - 5i)$	$22 + 7i$
26.	$i^{10} \cdot i^{11} \cdot i^{12} \cdot i^{13}$	-1
27.	$(1 - i)(1 + i)$	2
28.	$(5 - 2i)^2 \cdot (5 + 2i)^2$	841
29.	$(11 - 7i) - (-2 + 5i)$	$13 - 12i$
30.	$(1 - \bar{7}i)^2$	$-48 + 14i$

Bingo

Ova je igra vezana uz temu *Kvadratna jednadžba* i obuhvaća cijelo gradivo te teme. To je svojevrsna inačica popularnog binga prilagođena za uporabu u nastavi.

Učenicima se podijele prazne bingo kartice i predoče rješenja svih 16 zadataka. Među rješenjima neka ne bude jednakih. Igrač (ili skupina igrača) izabere 9 od tih rješenja i neizbrisivom olovkom unese ih u polja kartice. Zbog kasnije kontrole u polje je potrebno upisati i redni broj zadatka. Naravno, možemo prirediti i sami tablice, ali to je malo više posla. Nakon što su kartice spremne kreće igra. Učenicima se prikazuje jedan po jedan od zadataka (ispisujemo ih na ploči ili prikazujemo projekciju na zidu). Oni rješavaju problem i nakon toga provjeravaju je li dobiveno rješenje na njihovoj kartici. Ako jest, zaokružuju ga. Nastavlja se rješavanje problema sve dok se ne javi učenik koji je popunio sva polja kartice.

Evo kako može izgledati karta sa svim rješenjima.

1 $-1 \pm 3i$	2 $k = -1$	3 $k = 1$	4 $16/9$
5 $x^2+2x+10=0$	6 $2x^2+x-1=0$	7 $k \leq 9/4$	8 12
9 0.6	10 $k \leq 9$	11 0	12 $k = \pm 3$
13 $x^2+3x-4=0$	14 $6x^2+x-1=0$	15 $k > 1/5$	16 $-1/2,\ 2$

A evo i primjera jedne bingo kartice.

2 $k = -1$	4 $16/9$	5 $x^2 + 2x + 10 = 0$
8 12	9 0.6	11 0
12 $k = \pm 3$	14 $6x^2 + x - 1 = 0$	16 $-1/2,\ 2$

Evo i prijedloga zadataka s rješenjima:

1. Riješi jednadžbu: $x^2 + 2x + 10 = 0$.
R: $x_{1,2} = -1 \pm 3i$.
2. Za koje su realne brojeve k rješenja jednadžbe $kx^2 - x - 1 = 0$ međusobno recipročna?
R: $k = -1$.
3. Za koje su realne vrijednosti koeficijenta k rješenja jednadžbe $3x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ međusobno suprotni brojevi?
R: $k = 1$.
4. Koliki je zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $3x^2 - 2x - 2 = 0$?
R: $16/9$.
5. Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima čije je jedno rješenje kompleksni broj $-1 + 3i$.
R: $x^2 + 2x + 10 = 0$.
6. Odredi kvadratnu jednadžbu čija su rješenja brojevi -1 i $\frac{1}{2}$.
R: $2x^2 + x - 1 = 0$.
7. Za koje su realne brojeve k rješenja jednadžbe $x^2 - 3x + k = 0$ realni brojevi?
R: Za sve realne brojeve $k \leq \frac{9}{4}$.
8. Koliki je umnožak rješenja kvadratne jednadžbe $(2x+3)(3x+4) = 0$?
R: 2.
9. Jedno rješenje jednadžbe $5x^2 + kx - 3 = 0$ je broj -1. Odredi drugo rješenje jednadžbe.
R: 0.6.
10. Za koje vrijednosti realnog parametra k sustav jednadžbi $x + y = 6$, $x \cdot y = k$ ima realna rješenja?
R: $k \leq 9$.
11. Koliki je zbroj svih rješenja bikvadratne jednadžbe $ax^4 + bx^2 + c = 0$?
R: 0.
12. Za koje je vrijednosti realnog broja k jedno rješenje jednadžbe $(3x-k)^2 = (x+3)^2$ jednako nuli?
R: $k = \pm 3$.
13. Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe iznosi -3, a razlika je jednaka 5. Odredi tu jednadžbu.
R: $x^2 + 3x - 4 = 0$.
14. Odredi kvadratnu jednadžbu čija su rješenja brojevi $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$.
R: $6x^2 + x - 1 = 0$.
15. Za koje su realne brojeve k rješenja jednadžbe $kx^2 - 2x + 5 = 0$ kompleksni brojevi?
R: $k > \frac{1}{5}$.
16. Riješi jednadžbu $x - x^{-1} = \frac{3}{2}$.
R: $-\frac{1}{2}$, 2.

Sudoku

Ovaj sudoku je kvadratična tablica 6×6 s pravokutnim potpoljima 3×2. To znači da će se u svakom retku i stupcu te u svakom potpolju smjestiti brojevi od 1 do 6. Najprije pripremimo tablicu. Na odgovarajuća mjesta valja upisati točna rješenja zadataka od a do n. Zatim preostala prazna polja popuni tako da u svakom retku i u svakom stupcu te u svakom pravokutniku 3×2 budu upisani svi brojevi od 1 do 6.

a. e^0 b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_3 4}$ c. $\log_4 16^3$
d. $(0.01)^{x-2} = 100 \cdot (0.1)^x$, $x = ?$
e. $1 - \ln e^{-5}$ f. $0.1^x \cdot 0.01^x = 10^{-12}$, $x = ?$
g. $\frac{\ln 32}{\ln 2}$ h. $\log 15 + \log 2 - \log 3$
i. $\log_2(3x+4) = 2 + \log_2(2x-4)$, $x = ?$
j. $\log(4^{1+\log_2 5})$ k. $\log_2(\log_2 256)$
l. $\log_2 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_4 4 \cdot \ldots \cdot \log_9 9$
m. $(0.5)^{x+4} = 4 \cdot (0.25)^x$, $x = ?$ n. $(\log_{32} 2)^{-1}$.

a	b			c	d
	e			f	g
	h	i			
j					
		k			l
			m	n	

a 1	b 4	5	3	c 6	d 2
3	e 6	2	1	f	g
5	h 1	i 4	2	3	6
j 2	3	6	5	1	4
6	5	k 3	4	2	l 1
4	2	1	m 6	n 5	3