Pell–Lucasovi brojevi

Jens Carstensen,
Alija Muminagić, Danska

U Miš-u br. 68 (veljača 2013.) objavljen je članak *Pellovi brojevi*. U ovom prilogu pišemo o Pell–Lucasovim brojevima i vezi između Fibonaccijevih i Pell–Lucasovih brojeva.

Definicija. Brojevi definirani s

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 3$$
$$Q_n = 2 \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n \geq 3 \qquad (1)$$

nazivaju se **Pell–Lucasovi brojevi**.

n	3	4	5	6	7	8	...
Q_n	7	17	41	99	239	577	...

Niz brojeva (Q_n) zove se Pell–Lucasov niz, a Q_n n-ti Pell–Lucasov broj.

Promatrajmo Pellov niz[1] (P_n) i Pell–Lucasov niz (Q_n).

P_n	1	2	5	12	29	70	169	408	...
Q_n	1	3	7	17	41	99	239	577	...

[1] Vidi članak Pellovi brojevi.

Lako izračunamo da je

$$5 = 2 + 3,$$
$$12 = 5 + 7,$$
$$29 = 12 + 17, \ \ldots$$

tj.

$$P_n = P_{n-1} + Q_{n-1} \qquad (2)$$

i

$$7 = 2 \cdot 2 + 3,$$
$$17 = 2 \cdot 5 + 7,$$
$$41 = 2 \cdot 12 + 17, \ \ldots$$

tj.

$$Q_n = 2 \cdot P_{n-1} + Q_{n-1}. \qquad (3)$$

Oduzimanjem jednakosti (3) od (2) dobivamo

$$P_n - Q_n = P_{n-1} - 2P_{n-1} = -P_{n-1},$$

odnosno

$$Q_n = P_n + P_{n-1}. \qquad (4)$$

Sada imamo mogućnost odrediti eksplicitnu formulu za Q_n.

Iz (4) zbog $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]$, te $P_{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}\right]$ dobivamo

$$Q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}\Big].$$

Stavimo li da je $p = 1+\sqrt{2}$, $r = 1-\sqrt{2}$, slijedi da

$$\begin{aligned}
Q_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[p^n - r^n + p^{n-1} - r^{n-1}\right] &\iff \\
2\sqrt{2}q_n = p^n - r^n + p^{n-1} - r^{n-1}& \\
= p^n\left(1+\frac{1}{p}\right) - r^n\left(1+\frac{1}{r}\right)& \\
= \frac{p^n}{p}(1+p) - \frac{r^n}{r}(1+r)& \\
= p^{n-1}(1+1+\sqrt{2}) - r^{n-1}(1+1-\sqrt{2})& \\
= p^{n-1}(2+\sqrt{2}) - r^{n-1}(2-\sqrt{2})& \\
= \sqrt{2}p^{n-1}\underbrace{(1+\sqrt{2})}_{=p} - \sqrt{2}r^{n-1}\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{=-r}& \\
= \sqrt{2}p^n + \sqrt{2}r^n = \sqrt{2}(p^n + r^n).&
\end{aligned}$$

Dakle,

$$Q_n = \frac{\sqrt{2}(p^n + r^n)}{2\sqrt{2}} = \frac{p^n + r^n}{2}. \qquad (5)$$

Pokušajte naći vezu Pell–Lucasovih brojeva i binomnih koeficijenata. Primjerice

$$\begin{aligned}
Q_6 &= \left[\binom{6}{0}, \binom{6}{2}, \binom{6}{4}, \binom{6}{6}\right] \cdot (2^0, 2^1, 2^2, 2^3) \\
&= (1, 15, 15, 1) \cdot (1, 2, 4, 8) \\
&= 1 + 30 + 60 + 8 = 99.
\end{aligned}$$

Veza između Fibonaccijevih i Pell–Lucasovih brojeva

Poznato je da za Fibonaccijeve brojeve vrijedi

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}. \qquad (6)$$

Za Pellove brojeve vrijedi

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 5, \\
2^2 + 5^2 &= 29, \\
5^2 + 12^2 &= 169, \\
12^2 + 29^2 &= 985,
\end{aligned}$$

tj.

$$P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n+1}. \qquad (7)$$

Za Lucasove brojeve vrijedi (vidi A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb 2000., str. 12)

$$L_n^2 - 5 \cdot F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n \qquad (8)$$

pa zbog

$$\begin{aligned}
Q_4^2 - 2 \cdot P_4^2 &= 17^2 - 2 \cdot 12^2 \\
&= 289 - 288 = (-1)^4, \\
Q_5^2 - 2 \cdot P_5^2 &= 41^2 - 2 \cdot 29^2 \\
&= 1681 - 1682 = (-1)^5,
\end{aligned}$$

slutimo da vrijedi

$$Q_n^2 - 2 \cdot P_n^2 = (-1)^n. \qquad (9)$$

Dokaz formula (7) i (9) prepuštamo čitateljima.

LITERATURA

1/ J. Carstensen, A. Muminagić, *Pell-tal og Pell-Lucas tal*, Matematik Magasinet, 65, august 2012.

2/ B. Dakić, *Padovanov niz i plastična konstanta*, Miš br. 57, godina 12./2010., str. 83–85.

3/ A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb 2000., str. 12.

4/ T. Koshy, *Pell Numbers: A Fibonacci-like Treasure for Creative Exploration*, Matematics Teacher, March 2011.

5/ D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

6/ D. Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 1997.