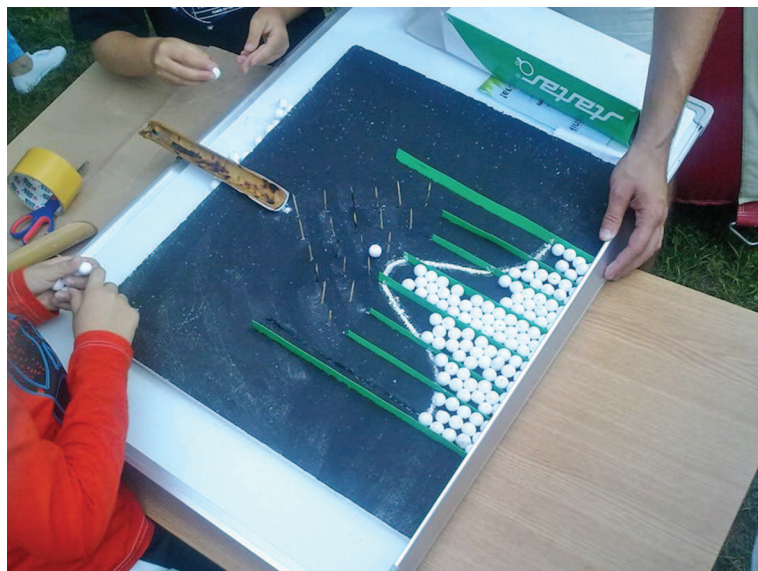


Galtonova daska



Šime Šuljić, Pazin

“Pogodite što je ovo na slici!” – objavili su na svojoj *Facebook* stranici početkom rujna ove godine članovi udruge Mladi nadareni matematičari “Marin Getaldić”. Znadete li vi, dragi čitatelji?

Riječ je o Galtonovoj daski ili Galtonovu pokusu. Sir Francis Galton (1822.–1911.), engleski antropolog, među prvima je shvatio važnost primjene statističkih metoda u biologiji nasljednih osobina. Galtonova daska predstavlja zapravo binomni eksperiment koji se svodi na spuštanje kuglice kroz zabijene čavlice u trokutastu rešetku. Kada naiđe na čavlicu kao prepreku kuglica može skrenuti lijevo ili desno. U sljedećem retku ponovno nailazi na čavlicu i na njemu opet može skrenuti lijevo ili desno, a jedan i drugi ishod jednako su vjerojatni, $p = 0.5$. Nakon prolaska kroz sve redove kuglica pada u jedan od pretinaca koji se nalaze na dnu uređaja. Ovaj je uređaj izvrstan za realnu vizualizaciju razdiobe, pa se na taj način vjerojatnost može približiti i mlađim učenicima. Naravno, na rezultat će utjecati nepravilnost u položaju čavlica, razmak među njima u odnosu na veličinu kuglice i možda još štogod. Zbog takvih stvari ne bi trebalo napustiti fizički model, ma koliko mi bili zaljubljenici u tehnologiju i ma koliko naše učenike sve više okružuje virtualni svijet. Možda baš zbog toga treba inzistirati na fizičkom modelu i odgojnoj ulozi izrade modela. A kada se jednom zaposle ruke, krene i

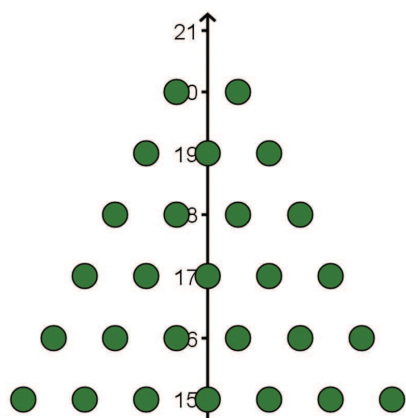
razmišljanje, koje je toliko potrebno u matematici.

Virtualni model svakako će dati bolje rezultate i dat će ih puno, doista će simulirati očekivanu teorijsku razdiobu. Isti pokus izrađen i izveden u *GeoGebri* neće mlade “istraživače” ostaviti ravnodušnim, tim više što lako mogu mijenjati broj izbačenih kuglica ali i broj redaka postavljenih čavlica. U upravo završenoj Noći istraživača 2013. naši kolege, nastavnici prirodnih znanosti, ostavljali su na učenike jak dojam s raznim pokusima. I matematika svoje konje za trku ima, a pokus poput Galtonova sigurno je jedan od njih.

Izrada ljuske

U izradi virtualnog Galtonova pokusa krenut ćemo od razmještanja čavlica. Nacrtat ćemo točke tako da svaki donji red ima jedan element više od prethodnog i da se točke u donjim redovima nalaze između dviju gornjih. To nije problem za trokutastu strukturu uvijek jednake dimenzije, jer se može izraditi alatom za crtanje točaka. Samo to nema smis-

la na računalu i odmah treba omogućiti korisniku da po volji mijenja broj redaka trokutaste strukture čavlića. U odnosu na os y najjednostavnije će biti simetrično postaviti te prepreke i podignuti početni redak na ordinatu ili početnu poziciju p . Na slici vidimo da je $p = 20$. Broj redaka čavlića, odnosno točaka, r izradimo u *GeoGebri* kao cjelobrojni klizač.



Slika 2.

Bilo koji redak u strukturi možemo dobiti s pomoću naredbe `Niz`:

```
Niz[ <izraz>, <varijabla>, <početna vrijednost>, <krajnja vrijednost> ].
```

Recimo onaj na ordinati 17, s pet točaka, s pomoću te naredbe bio bi `Niz[(i, 17), i, -2, 2]`.

Krajnju i početnu vrijednost niza treba prepustiti računalu da je odredi kao relativnu vrijednost retka u odnosu na početnu poziciju p :

```
Niz[(i, 17), i, (17 - p) / 2 - 0.5, 1 + (p - 17) / 2]
```

Zamijenimo sada konkretnu vrijednost ordinate 17 s varijablom j . To onda znači da ovu naredbu niz moramo ugnijezditi unutar nove naredbe `Niz` s početnom vrijednošću $p - r + 1$ i završnom p :

```
č = Niz[Niz[(i, j), i, (j - p) / 2 - 0.5, 1 + (p - j) / 2], j, p - r + 1, p]
```

Ako je $r = 3$, u grafičkom ćemo prozoru dobiti tri početna reda točaka, a u algebarskim listu uređenih parova:

```
č = { {(-1.5, 18), (-0.5, 18), (0.5, 18), (1.5, 18)},
      {(-1, 19), (0, 19), (1, 19)},
      {(-0.5, 20), (0.5, 20)} }.
```

O broju redaka čavlića ovisi broj pretinaca u koje će na kraju upadati kuglice, kao i njihova pozicija. Ako je r broj redaka čavlića, apscise središta pretinaca zadajmo naredbom:

```
pretinci = Niz[i, i, -r / 2 + 0.5, r / 2 - 0.5].
```

Te pretince možemo razgraničiti pregradama:

```
pregrade = Niz[Duzina[(i, 0), (i, p - r)], i, -r / 2, r / 2].
```

Kuglice i statistika ishoda

Neka je m maksimalan broj kuglica koje ćemo jednu po jednu ispuštati u pokusu. Taj broj je u programu najbolje izraditi kao cjelobrojni klizač primjerice u granicama od 10 do 1000. Klizač n u granicama 1 do m služiti će za animaciju padanja kuglica jednog pokusa. Kada kuglica dolazi na čavlić ona ga može zaobići slijeva ili zdesna. Oba događaja su jednako vjerojatni. Obilazak slijeva je u odnosu na prethodnu poziciju kuglice zapravo pomak za -0.5 po apscisi, odnosno obilazak zdesna pomak za 0.5 koordinatnih jedinica po apscisi. S pomoću generatora slučajnih brojeva najbolje je odrediti matricu pomaka na svim redovima za sve padajuće kuglice odjednom, ugniježđenom naredbom `Niz`:

```
M = Niz[Niz[SlučajniBrojIzmeđu[0, 1] - 0.5, i, 1, r - 1], j, 1, m]
```

Naredba `SlučajniBrojIzmeđu[0, 1]` daje samo brojeve 0 ili 1, a kad se oduzme 0.5 onda su ishodi -0.5 i 0.5 . U unutarnjoj naredbi `Niz` krajnja je vrijednost $r - 1$, jer prvi redak čavlića na način kako

smo ga ovdje postavili ne daje mogućnost izbora za prolaz kuglice. S $r - 1$ određen je broj stupaca matrice. Krajnja vrijednost za varijablu j u vanjskoj naredbi **Niz** je m , odnosno zadani maksimalni broj kuglica, koja određuje broj redaka matrice. Redak matrice određuje putanju jedne padajuće kuglice. Evo primjera jedne slučajno generirane matrice za šest redaka čavlića i 10 kuglica:

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Slika 3.

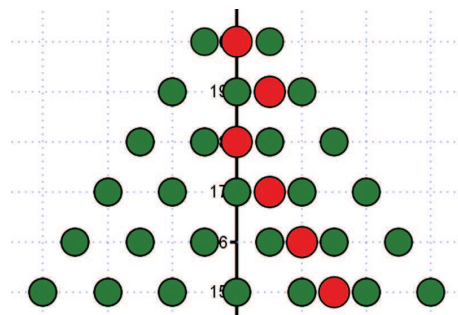
Iz prvog retka te matrice (slika 3) lako se čita da se prva kuglica pri padu u drugi red pomakla za 0.5 udesno, pa u treći red za 0.5 ulijevo u odnosu na drugi red, u četvrti red za 0.5 udesno itd. Krajnja pozicija na x osi je zbroj pomaka: $0.5 - 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5$ (slika 4). Apscisa kuglice u bilo kojem retku je zbroj prethodnih elemenata retka generirane matrice. Zato horizontalne pomake kuglice definiramo ovako:

```
pomak_x = Niz[Zbroj[Element[M, n], i],  
i, 1, r - 1].
```

Ovdje naredba **Element[M, n]** daje n -ti redak matrice M . Tako za prvi redak matrice, odnosno za $n = 1$ dobijemo vrijednost $\{0.5, 0, 0.5, 1, 1.5\}$. Da bismo nacrtali čvrne točke putanje kuglice, uzet ćemo elemente liste **pomak_x** kao apscise i pridijeliti im padajuće ordinate:

```
putanja = Niz[(Element[pomak_x, i],  
p - i), i, 1, r - 1],
```

gdje je p ranije definirana ordinata početne pozicije kuglice. Tu poziciju, odnosno kuglicu nacrtajmo kao točku $(0, p)$.



Slika 4.

Za pokus je važno bilježiti izlazne pozicije kuglice iz rešetke, koje možemo nazvati **ishodi**. Dočim je generirana matrica M pomaka na svim redovima za sve kuglice, moguće je njome redom izračunati ishode. To su zapravo zbrojevi redaka matrice M , a njih dobijemo ugniježđenom naredbom:

```
ishodi = Niz[Zbroj[Element[M, i]],  
i, 1, m].
```

Ta naredba u slučaju generirane matrice na slici 3 daje vrijednosti: $\{1.5, -1.5, 1.5, 1.5, -1.5, 1.5, -0.5, -0.5, 1.5, -1.5\}$. Potrebno je prebrojati ishode i utvrđivati frekvencije pojedinog ishoda pri padu svake nove kuglice, odnosno vezati to prebrajanje frekvencija uz broj n koji ćemo kasnije animirati. Frekvencije pada kuglice u pojedini pretinac bilježimo u skupu pod nazivom *frekvencije*:

```
frekvencije = Niz[UvjetnoPrebrajanje  
[x == i, Podskup[ishodi, 1, n]], i,  
-r / 2 + 0.5, r / 2 - 0.5]
```

Naredba **UvjetnoPrebrajanje[<uvjet>, <lista>]** prebraja elemente određene liste ako zadovoljavaju određeni kriterij. Lista čije elemente treba prebrojati je zapravo skup *ishodi*, ali ne želimo da se to dogodi odjednom, nego dinamično nakon pada n -te kuglice. Tako da zapravo prebrajamo podskupove liste *ishodi* ugniježđenom naredbom **Podskup[ishodi, 1, n]**. Sam kriterij će u ovom slučaju biti ispitivanje je li pojedini element

opisanog podskupa jednak elementima liste koju smo nazvali *pretinci*.

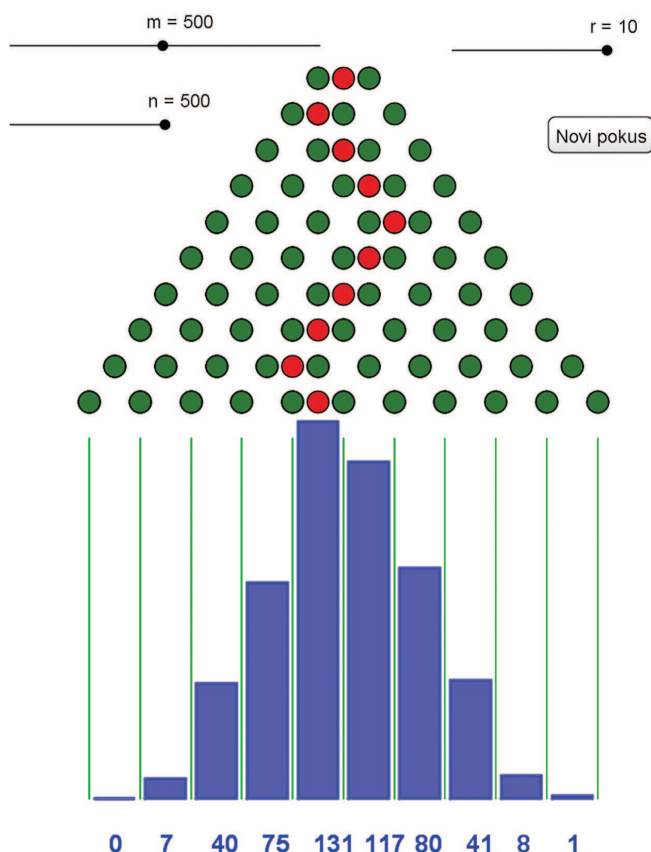
A kako sada u grafičkom prikazu programa puniti pretince kuglicama? Možemo se odlučiti da se kuglice gomilaju, ali zbog jednostavnosti zamijenimo ih stupčastim dijagramom, odnosno naredbom:

```
StupčastiDijagram[ <lista podataka>,
<lista frekvencija>, <širina stupaca> ],
```

odnosno:

```
StupčastiDijagram[pretinci,
40/m frekvencije, 0.8].
```

Ovdje je parametar $40/m$ proizvoljni faktor koji umanjuje visinu dijagrama, kako zbog velikog broja



Slika 5.

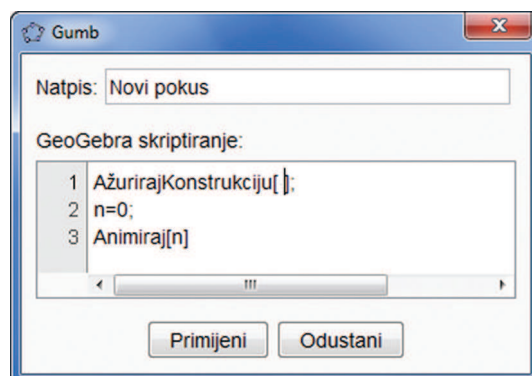
kuglica stupci dijagrama ne bi prešli preko rešetke od čavlića.

Ispod stupčastog dijagrama moguće je dopisati dinamični tekst koji prikazuje brojčanu vrijednost frekvencija pojedinog ishoda jednostavnom naredbom:

```
TekstKaoTablica[ frekvencije ].
```

Animacija

Galtonov pokus možemo animirati. Najzgodnije je to napraviti s pomoću gumba i ubaciti malo *GeoGebra* skriptiranja. Odaberite alat **Umetanje gumba** i kada se otvori dijaloški okvir, upišite tekst kao na slici:



Slika 6.

Teorijski pristup

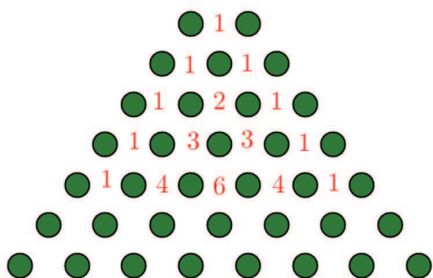
Ako promatramo horizontalni prolaz između dva čavlića, onda je u početnim redcima lako izbrojiti na koliko je sve načina moguće doći do njih. Ubrzo ćemo shvatiti da je riječ o poznatim binomnim koeficijentima Pascalova trokuta. Ako promatramo peti redak tablice, odnosno četvrti bez onog prvog u kojem nema izbora onda možemo očekivati da će pretinci biti popunjeni redom:

$$\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$$

od broja svih kuglica. Vjerojatnost se može izračunati i s pomoću Bernoullijeve sheme. Vjerojat-

nost da kuglica obide s jedne ili druge strane čavlic je uvijek jednaka i iznosi **0.5**. U našem slučaju bi za pojedini pretnac i , ako rešetka ima r redaka iznosila:

$$P(i) = \binom{r-1}{i-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{r-i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ = \binom{r-1}{i-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}.$$



Slika 7.

Sukladno toj formuli izračun očekivane frekvencije računamo ovako:

```
Niz[BinomniKoeficient[r - 1, i]
0.5 ^ (r - 1) n, i, 0, r - 1],
```

a pripadni očekivani dijagram zadamo naredbom:

```
StupčastiDijagram[pretinci, 40 / m tf-
rek, 0.7].
```

Izrada ovog virtualnog pokusa može vam se učiniti teškim zadatkom ako niste napredniji korisnik *GeoGebra*. Međutim, ne morate krenuti ispočetka. Otvorite servis [GeoGebraTube](http://www.geogebraTube.org) (<http://www.geogebraTube.org>) i u tražilicu upišite "Galtonova daska".

Svi materijali na servisu mogu se preuzeti, mijenjati i pod istim uvjetima dijeliti. Tako je i s uratkom koji sam u ovom članku opisao. Možete ga čak otvoriti za uređivanje na samom servisu ukoliko se registrirate. Preporučujem vam da u izborniku **Pogled** otvorite **Opis konstrukcije** i da se tako 'uživo' upoznate s konstrukcijom Galtonove daske. Možda dođete do koje jednostavnije ideje u konstrukciji pojedinih koraka ili samo prepravite neka manje

važna svojstva konstrukcija. U svakom slučaju, vi to izravno, bez preuzimanja na svoje računalo, možete objaviti na samom servisu. *GeoGebraTube* je jedan od onih modernih internetskih servisa na kojem se vaši učenici mogu poigrati Galtonovim pokusom sa svog pametnog telefona.

Slobodno možete preuzeti materijal, preraditi ga po svom ukusu, a zašto ne i štogod pojednostavniti i ponovno podići na servis.

Prošli mjesec je u Hrvatskoj gostovala britanska neurologinja svjetskog glasa dr. Susan Greenfield, koja ne odbacuje tehnologiju kao takvu, ali je protivnik olakog uvođenja tableta u škole. U intervjuu za *Jutarnji list* je kazala:

Trebamo učitelje koji će tehnologiju u nastavi koristiti tako da ona bude tek pomoćno sredstvo, a ne svrha učenja. Kod nas se u Britaniji već neko vrijeme vodi velika debata o upotrebi iPada u školama. O tome kako se iPad upotrebljava, s kojom svrhom i zašto. Ako učeniku date iPad, nećete mu time odmah uručiti i uvid, razumijevanje, kreativnost. Ne dajte vam tehnologija automatski i vještine. S druge strane, to je vrlo moćna tehnologija koja u pravim rukama, s pravim učiteljem omogućuje lakše učenje u određenim sferama. Možete raditi i vidjeti stvari puno lakše negoli biste to mogli prije nekoliko godina. No, tu pogotovo treba dobar učitelj.

Dobrog učitelja određuje odnos prema učenicima, visoka stručnost, pa i zanesenost sadržajima koje poučava, osobnost, mnoga umijeća... i sada se tu pojavljuje potreba za umijećem vladanja tehnologijom. Prije svega trebalo bi shvatiti koliko je tehnologija u određenim sferama moćna. Matematika i nastava matematike su sfere gdje se moć tehnologije itekako može osjetiti, kao u rijetko kojem drugom nastavnom predmetu. Nije realno očekivati da će nam opći informatički tečajevi to otkriti. Zagristi u jedan ovakav primjer s alatom kakav je *GeoGebra* pravi je izazov u kojem možete otkriti novu dimenziju ljepote matematike i istovremeno upoznavati moć nadiruće tehnologije.