Uloga i značaj
domaćih zadaća u nastavi matematike

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Rješavanje velikih i teških problema u matematici često predstavlja pravo otkriće. No, i u rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko. Ako se radi i o skromnom zadatku, što pokreće interes i dosjetljivost učenika koji ga rješava vlastitim snagama, rezultat će biti napetost i trijumf pronalazača. Takvi uspjesi u mlađim danima mogu stvoriti sklonost za umni rad i životno utjecati na duh i karakter mlade ličnosti.

Tu je velika prilika za nastavnika matematike jer je matematika jedinstvena znanost kada je u pitanju razvijanje kreativnog duha kod učenika. Ako nastavnik tijekom nastave konstantno učenicima mehanički "teše" već dobro uvježbane postupke, on smanjuje njihov interes i koči njihov intelektualni razvoj. Međutim, ako on u svojim učenicima budi radoznalost dajući im odgovarajuće zadatke i ako im pomaže pravilno odabranim uputama s ciljem poticanja, tada će sigurno u njima razvijati sklonost za samostalnim mišljenjem i pokazivati im putove do njega.

Ako učenik shvati da rješavanje matematičkog problema može pružiti isto toliko zadovoljstva koliko i ispunjavanje križaljke ili da neprekidan umni rad može biti jednako privlačan kao napeti sportski dvoboj, tada je cilj postignut i put toga učenika je određen. Tko jednom okusi radost u matematici, sigurno je neće lako zaboraviti. Takvom učeniku matematika postaje najmilija zabava, efikasno oruđe njegova znanja ili često čak životna strast.

U svemu ovome, veoma važnu ulogu igra i zadavanje zadaće učenicima. Kroz domaću zadaću učenik ima jedinstvenu priliku raditi samostalno, tj. primijeniti heurističku metodu. Zadatak pokazuje je li učenik razumio izloženo gradivo i može li ga primijeniti u samostalnom radu. Nastavnik treba često zadavati i kontrolirati domaće zadaće. Svjedoci smo neobičnosti slučaja da nastavnici koji zadaju i kontroliraju domaće zadaće, a možda slabije predaju, mogu imati više uspjeha nego oni koji predaju dobro, a ne pregledavaju domaće zadaće.

Prvo pitanje koje je često kamen spoticanja u radu mnogih nastavnika matematike jest zadavanje domaće zadaće prema količini i težini postavljenih zadataka. Činjenica je da danas ima mnogo nastavnika koji se drže pravila da je veliki broj zadataka zadan za domaću zadaću garancija da će učenici naučiti njegov predmet. U praksi sam susretao nastavnike koji su znali zadati po 40 zadataka razne težine (nastavnik ih nije prethodno obradio!) da ih učenici riješe za 2–3 dana. Da nesreća bude veća, najčešće je to bio slučaj s učenicima prvog razreda srednje škole. Prema mojem dubokom uvjerenju i iskustvu, ovakvi nastavnici nisu u pravu. Treba naći mjeru: učenikov angažman pritom ne treba prelaziti jedan sat dnevno. Mi smo ti koji moramo eksperimentalno utvrditi koliko vremena treba za rješavanje određenih zadataka. Ne treba uvijek davati zadatke istog tipa, zadatci trebaju biti uvijek povezani s teorijom i zadani slijedom od lakšeg k težem i složenijem. Koliko puta ste našli da vam učenici znaju riješiti složen izraz s pomoću logaritama, a ne znaju što je to logaritam kao npr. $\log_4 \sqrt{2} = ?$ ili slično.

Zadatci za domaću zadaću mogu se zadavati u svakoj fazi nastavnog sata. Primjerice, dokazivali smo neki teorem. Za domaću zadaću zadamo učenicima da dokažu njegov obrat, ili pak neke specijalne slučajeve tog teorema, te neki teorem sličan tom. Domaća zadaća se u pravilu daje na kraju nastavnog sata, ali nikako poslije zvona iz više razloga: učenicima uzimamo pravo na odmor, disciplina nije više na visini, nema pažnje, učenici neće to pribilježiti, itd. Najjednostavnije je zadati domaću zadaću iz udžbenika ili zbirke zadataka, ili ako učenici ne raspolažu time, nastavnici sami osmisle domaću zadaću. Nije dobro sve izdiktirati, nego treba napisati na ploču što je moguće više podataka. Naravno, ako se zadaje zadaća iz udžbenika ili zbirke, to ide lakše i brže, ali s tim zadatcima se treba ranije upoznati. Što se tiče težine, najbolje je zadavati zadatke koje može većina učenika riješiti. Pritom ne treba zaboraviti bolje učenike, te zaljubljenike u matematiku. Njima se mogu zadati složeni zadatci jer suviše jednostavni zadatci od njih ne traže veći napor što sve skupa krije veće opasnosti. Zadatci se mogu zadati s uputom i bez upute. Tu se često može pogriješiti ako nastavnik skoro sve objasni učenicima kako bi riješili zadatak. Uputa treba biti kratka, najbolje samo jedna rečenica, npr.: "Povuci tu i tu liniju". U zbirci se obično nalaze rezultati, a u nekim zbirkama čak su svi zadatci riješeni. To je mač s dvije oštrice. U prvom slučaju je negativna strana danog rezultata u tome što učenik često imajući rezultat "namiješta" rješenje zadatka, ali za vrijedne i samostalne učenike to je i dobro jer oni žele provjeriti dobiveni rezultat. Kada je riječ o zbirkama gdje su takoreći svi zadatci riješeni, a takve zbirke se danas nažalost često reklamiraju i nude kao nekakav spas, odmah ću istaknuti da sam protiv njih iz principa. Suvišno je objašnjavati zašto.

Što se tiče provjere domaće zadaće, smatram da je to pitanje bitno koliko i samo zadavanje zadaće. Tu treba razlikovati dvije stvari:

1. Provjera same činjenice jesu li učenici napisali domaću zadaću.
2. Kako su riješili domaću zadaću.

Prva provjera je dosta jednostavna. Učenici drže otvorene bilježnice na klupi, a nastavnik pregleda redom bilježnice. Tu je važno naviknuti učenike da pišu zadaće. Neki nastavnici traže da se učenici sami jave ako nisu napisali domaću zadaću, što se često svede na čiste formalnosti. Važno je kako su učenici riješili domaću zadaću. Provjerom zadaće nastavnik može otkriti jesu li učenici razumjeli gradivo. Može se nekoliko zadaća provjeriti, unaprijed određujući kod kojih učenika ćemo pregledati zadaće. Nastavnik treba riješiti i proanalizirati zadatke, pa će provjera zadaće ići brže i lakše će se uočavati greške. U međuvremenu se može prozvati par učenika na ploču kako bi napisali svoja rješenja. Tu se može stvoriti i natjecateljska atmosfera u razredu, a ocjene će biti nagrade. Ako su učenici prilikom rješavanja nekog zadatka masovno griješili ili su neki učenici napravili grubu pogrešku, onda je nastavnik uz asistenciju učenika, dužan ukazati na taj propust. Osim ovih vidova provjere domaćih zadaća, nastavnik može s vremena na vrijeme izvršiti detaljniju provjeru domaćih zadaća (koje trebaju nositi odgovarajući redni broj) uzimajući određeni broj bilježnica i noseći ih kući.

Učenike moramo takoreći od prvog dana učiti kako se dolazi do rješenja zadatka. Treba ih učiti razumjeti zadatak i znati prepoznati ili učiniti:

1. Šta je nepoznato? Šta je zadano? Kako glasi uvjet?
2. Je li moguće zadovoljiti uvjet? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice? Ili nije dovoljan? Možda je neodređen? Ili kontradiktoran?
3. Nacrtaj sliku! Uvedi primjerene oznake!

4. Rastavi razne dijelove uvjeta! Možeš li ih napisati?

Treba učiti učenike znati isplanirati kako riješiti zadatak; naučiti ih pritom kako tražiti vezu između zadanog i nepoznatog. Ako se ne može odmah naći neposredna veza, treba ih učiti da razmatraju neke pomoćne zadatke ili upućivati pak na srodne i slične zadatke. Važnu ulogu pritom igra provjeravanje dobivenih rješenja, kao i je li rješenje iscrpno, tj. jesu li obuhvaćeni svi slučajevi. Rješenje mora biti obrazloženo, tj. dokazano ako se radi o zadatcima takve vrste gdje je to neophodno; mora biti pravilno i uredno napisano. Kod zadataka gdje se traži diskusija rješenja, treba ustrajati na toj diskusiji, a ne zadovoljavati se golim rješenjem. Ta diskusija je najčešće suština i ona ukazuje jesu li učenici usvojili gradivo i jesu li u stanju raditi samostalno. Sve ovo nije nimalo lak posao, ali budemo li tome pridavali pažnju i važnost od prvog dana, možemo postići stvarno veoma dobre rezultate.

U drugom dijelu ovog članka donosimo neke primjere zadataka koji će potkrijepiti izlaganje prvog dijela.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu

$$\frac{x-2}{5}-\frac{x-3}{2}=4.$$

Ovo je dosta jednostavan zadatak. Nakon sređivanja učenik dobije:

$$2x-4-5x-15=40.$$

Često se griješi u oslobađanju nazivnika u drugom razlomku (trebalo je $+15$). Radeći dalje, dobiva se

$$2x-5x=40+4-15$$

$$-3x=29$$

$$x=-\frac{29}{3}.$$

Učenik je napravio još jednu pogrešku prilikom prebacivanja -15 na desnu stranu jednadžbe. Spomenute se dvije pogreške ponište, učenik je dobio točan rezultat, a pogreške su uistinu bile velike.

Ovaj primjer iznosimo jer se dobiva dobar rezultat iako se mnogo griješilo u računanju, a nastavnici koji gledaju samo rezultat ovdje se mogu jako prevariti u ocjeni/bodovanju.

Primjer 2. Imamo poznati teorem:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\qquad (a\geq 0,\, b\geq 0).$$

Ne vodeći računa o veličinama pod korijenom možemo opet griješiti u računanju, a dobiti dobar rezultat.

Evo kako:

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{(-4)\cdot(-4)}=\sqrt{(-4)^2}=-4.$$

Dva puta smo pogriješili, prvi put stavljajući pogrešno da je $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{(-4)(-4)}$, a drugi put ne vodeći računa da je $\sqrt{a^2}=|a|$. Opet su se dvije greške poništile i dobili smo točan rezultat, jer imamo da je:

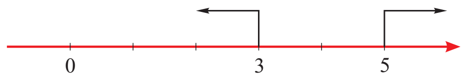
$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-4}=i\sqrt{4}\cdot i\sqrt{4}=i^2\sqrt{4^2}=(-1)\cdot 4=-4.$$

Primjer 3. Ovdje će biti riječi o pogrešnom zapisivanju rješenja. Riješimo nejednadžbu

$$x^2-8x+15>0.$$

Lako nađemo dva različita rješenja $x<3$ i $x>5$. Učenik po inerciji piše $3>x>5$, a ovo je neodrživo jer iz $a>b$ i $b>c$ slijedi da je $a>c$, odnosno kako smo zapisali $3>5$ što je netočno. Pravilno zapisano rješenje glasi:

$$x\in(-\infty,3)\cup(5,+\infty).$$



Slika 1.

Primjer 4. Opet će biti riječi o nepravilnom zapisivanju i točnom rezultatu.

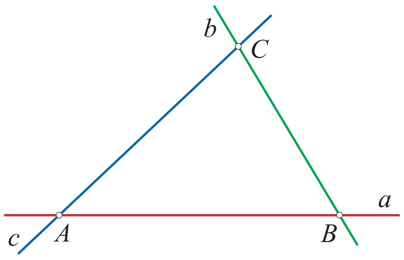
$$\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=?$$

Učenik radi često ovako:

$$\frac{10-12}{15}=-\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{15}.$$

Radeći on jednostavno zaboravlja $\frac{1}{2}$ kao faktor, ali na kraju se ispravlja i dobiva dobar rezultat.

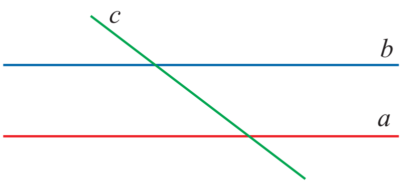
Primjer 5. Ovdje će biti govora o tome da rješenje zadatka mora biti iscrpno. Riješimo sljedeći zadatak: Konstruirajte kružnicu koja dodiruje tri zadana pravca u ravnini.



Slika 2.

a) Učenici, najčešće rješenje svedu (crtajući ovakvu sliku) na kružnicu upisanu u trokut ABC. Ne vode računa o trima kružnicama koje se mogu konstruirati izvan trokuta ABC; dakle u općem slučaju imamo četiri rješenja.

b) Imamo dva rješenja ako su dva pravca od tri paralelna, a treći ih presijeca, a nemamo rješenja ako su sva tri pravca međusobno paralelna ili se sva tri sijeku u jednoj točki. Tek sada rješenje je potpuno.



Slika 3.

Primjer 6. Često kod zadataka, gdje je potrebno uključiti diskusiju u rješenje, učenici izostavljaju baš to glavno, tj. diskusiju. Primjerice:

Riješite i diskutirajte rješenja jednadžbe:

$$m^2x + m = m^2 + x.$$

Nakon sređivanja dobivamo:

$$(m^2 - 1)x = m(m - 1).$$

Učenik jednostavno piše:

$$x = \frac{m(m-1)}{m^2-1} = \frac{m(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

Naravno ovo je rješenje ako je $m \neq \pm 1$.

Jednadžba je neodređena za $m = 1$, tada je x proizvoljno, a nemoguća i nema rješenja za $m = -1$. Tek je sada rješenje zadatka kompletno.

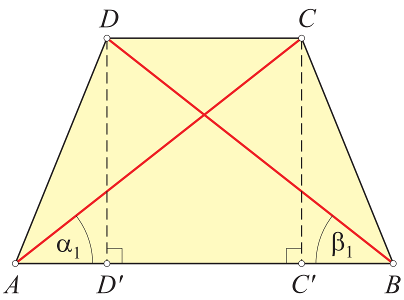
Primjer 7. Siromaštvo u radu prilikom rješavanja zadataka koji su formulirani u obliku tvrdnje za koju treba provesti dokaz u oba smjera (nužan i dovoljan uvjet) naročito dolazi do izražaja kod učenika. Evo jednog primjera:

Da bi trapez bio jednakokračan, nužno je i dovoljno da mu dijagonale budu jednake.

Dokaz: Učenici se obično trude dokazati dovoljan uvjet, tj. ako su dijagonale jednake, trapez je jednakokračan.

P: $|AC| = |BD|, \ \ AB \parallel CD$

T: $|AD| = |BC|$.



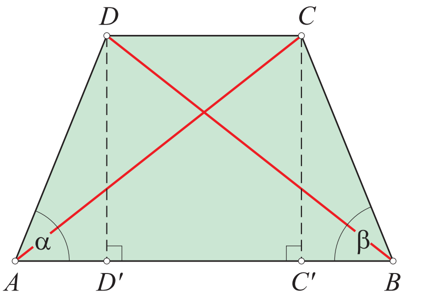
Slika 4.

Imamo: $\triangle ACC' \cong \triangle BDD' \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$ i sada: $(|AB| = |BA|, \ \alpha_1 = \beta_1, \ |AC| = |BD|) \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow |AD| = |BC|$.

No, moramo dokazati i nužan uvjet, tj.: ako je trapez jednakokračan, dijagonale su mu jednake.

P: $AB \parallel CD, \ |AD| = |BC|$

T: $|AC| = |BD|$.



Slika 5.

Imamo: $\triangle ADD' \cong \triangle BCC' \Rightarrow \alpha = \beta$ i sada: $(|AB| = |BA|,\ \alpha = \beta,\ |AD| = |BC|) \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ABC \Rightarrow |AC| = |BD|$. Tek sada je dokaz kompletan.

Ista pojava se uočava, a vrlo često i nerazumijevanje suštine, kada su u pitanju zadatci gdje se određuje neko geometrijsko mjesto točaka.

Geometrijsko mjesto točaka je skup svih točaka koje zadovoljavaju određeni uvjet. Dakle, da bi nešto bilo geometrijsko mjesto točaka, tu treba dokazati sljedeće:

1° $M \in F \Rightarrow M$ zadovoljava uvjet U,

2° M zadovoljava uvjet $U \Rightarrow M \in F$,

gdje je F geometrijsko mjesto točaka, a M točka. To ćemo pokazati na sljedećem primjeru:

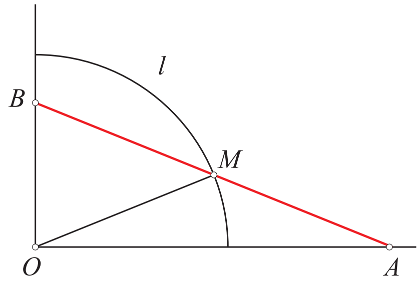
Primjer 8. Nađite geometrijsko mjesto polovišta svih dužina dane duljine d čiji se krajevi A i B kreću po kracima danog pravog kuta.

Rješenje.

1° (M polovište dužine $\overline{AB}$) $\Rightarrow |OM| = \dfrac{1}{2}|AB| = \dfrac{d}{2} =$ konst.

$$M \in k\left(O, \frac{d}{2}\right),\ M \in l\left(O, \frac{d}{2}\right)\ (l - \text{luk}).$$

(Ovdje je uvjet (svojstvo) točke M biti polovište dužine $\overline{AB}$.)



Slika 6.

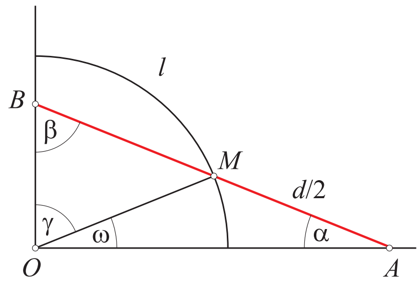
2° Sada ćemo dokazati:

$$M \in l\left(O, \frac{d}{2}\right) \Rightarrow M \text{ polovište dužine } \overline{AB}\ (|AB| = d),$$

$$k'\left(M, \frac{d}{2}\right),\ |AM| = |OM| \left(= \frac{d}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \omega$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = 90^0 - \omega \\ \beta = 90^0 - \alpha \\ \alpha = \omega \end{array}\right\} \Rightarrow |BM| = |OM| = \frac{d}{2}$$

M je polovište dužine $\overline{AB}$ ($|AB| = d$). Dakle, sada je dokazano da je luk $l\left(O, \dfrac{d}{2}\right)$ traženo geometrijsko mjesto točaka.



Slika 7.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Metodika nastave matematike (skripta)*, Prirodno-matematički fakultet, Odsjek za matematiku, Sarajevo, 1999.

2/ Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema, Metodika nastave matematike*, Element, Zagreb, 2010.

3/ G. Polya, *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo (Matkina biblioteka), Zagreb, 2003.