“Što bi bilo kad bi...?”

Metodički razlozi ZA upotrebu pogodbenih rečenica u matematičkim zadatcima

Goran Trupčević,
Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

Zadatci u nastavi matematike su tradicionalno puni imperativa poput *“Izračunaj, riješi, nađi x, pojednostavni, faktoriziraj, nacrtaj, zapiši”* te pitanja zatvorenog tipa poput *“Koliko je rješenje jednadžbe? Koliki je x?”* i sl. Takvi zadatci bi trebali biti dopunjavani pitanjima otvorenog tipa, npr. *“Objasni, Prikaži neki svoj primjer, Zašto?, Obrazloži”*. U vrijedne zahtjeve ubraja se i primjena kondicionala i pogodbenih rečenica poput, primjerice, *“Što bi se dogodilo s desnom stranom jednakosti kada bismo drugi pribrojnik uvećali za 1?, Kako bi glasila jednadžba pravca kada bismo pravac sa slike pomaknuli za 1 udesno? Objasni.”* i sl. U ovom članku bit će riječi upravo o promicanju upotrebe uvjeta u matematičkim zadatcima.

Uvod

Jedna od klasičnih podjela usvojenog matematičkog znanja je ona na konceptualno i proceduralno (Hiebert, 1986.; Rittle-Johnson i Schneider, 2013.). Dok se konceptualno znanje odnosi na usvajanje matematičkih ideja i koncepata, proceduralno znanje se odnosi na ovladavanje postupcima (algoritmima, procedurama) za rješavanje nekog problema. Konceptualno i proceduralno znanje možemo shvatiti kao dva pôla koji su oba potrebni ako želimo učenike uvesti u svijet matematike. Nastavu matematike možemo shvatiti kao neprestanu “napetost” između tih dvaju polova gdje se stalno i iznova promišlja o pristupima matematičkim sadržajima. Istraživanja zahtjeva iz udžbenika i nastavne prakse pokazuju da u Hrvatskoj prevladavaju zahtjevi proceduralnog matematičkog znanja (Glasnović-Gracin, 2011.; Glasnović-Gracin i Jukić-Matić, 2014.). Analiza udžbeničkih sadržaja pokazuje predominaciju zadataka zatvorenog tipa bez konteksta s naglaskom na računanje i operiranje. Takva slika prikazuje matematiku prvenstveno kao alat, a ne kao sredstvo kojim se komunicira i koje, između ostaloga, služi za donošenje kvalitetnih zaključaka (Heymann, 1996.). Je li prema takvim ciljevima nastave i nama matematičarima matematika umjesto kraljice znanosti postala, ne sluškinja, već doslovce zarobljena u procedurama? Umjesto da automatizirane radnje budu baza i alat za nove matematičke spoznaje i kreativnost, kao da su u nekim slučajevima procedure postale same sebi svrha. Stoga je nužno uvećati udio zadataka u kojima se traži i konceptualno znanje. To su zadatci u kojima učenik šire i dublje promišlja o matematičkim pojmovima i odnosima, a često se zadaju kroz zadatke otvorenog tipa u kojima se traži da učenik svojim riječima nešto objasni, prikaže svoje rješenje, promisli, diskutira, usporedi i sl. Više je vrsta takvih zadataka, a posebno važne za matematičke spoznaje su pogodbene upitne rečenice tipa *"Što bi bilo kad bi..."* te *"Što će se dogoditi ako..."*.

Uvjet ili pogodba

Uvjeti spadaju u dio svakodnevnog života, a izriču se uvjetnim ili pogodbenim rečenicama. To su zavisne rečenice u kojima se u zavisnoj surečenici izriče uvjet pod kojim se ostvaruje radnja glavne rečenice[1]. S obzirom na vjerojatnost ostvarivanja radnje, razlikujemo stvarne ili realne uvjetne rečenice, moguće ili potencijalne i nestvarne ili irealne uvjetne rečenice. U matematičkim se zadatcima koriste stvarna i moguća pogodba, odnosno uvjet. U stvarnim uvjetnim rečenicama sadržaj glavne rečenice ostvaruje se ako se ostvari uvjet sadržan u pogodbenoj surečenici (veznici: *ako, ukoliko, li*).

Na pitanje *"Što će se dogoditi s površinom kvadrata ako mu udvostručimo duljinu stranice?"* Ili *"Što će se dogoditi s površinom kvadrata udvostručimo li mu duljinu stranice?"* kao odgovor ćemo dobiti stvarne uvjetne (pogodbene) rečenice: ***Ako*** *udvostručimo duljinu stranice kvadrata, površina će....* U mogućim uvjetnim rečenicama moguće ostvarenje radnje u zavisnoj surečenici omogućuje ostvarenje radnje glavne rečenice. Na pitanje *"Kakav bi bio rezultat* ***kada*** *bismo umjesto neparnoga pribrojnika stavili paran?"* odgovor je moguća (potencijalna) uvjetna rečenica: *Kada bismo umjesto neparnoga pribrojnika stavili paran, rezultat bi bio...*

Uvjetne su rečenice vrlo česte u matematičkim zadatcima (*ako* i *kad*), a u teoremima su česte rečenične strukture s veznicima *ako i samo ako* te *samo kad*.

Metodička vrijednost upotrebe pogodbenih rečenica u nastavi

Ovakve pogodbene upitne rečenice imaju veliku vrijednost jer učenike potiču da uočavaju veze između matematičkih objekata te da dublje promišljaju o tim odnosima. Na taj se način stvara bolja slika o konceptima koja mnogim učenicima itekako nedostaje. Važno je naglasiti da bi ovakva pitanja trebala biti namijenjena svim učenicima, a ne samo onim najboljima. U sklopu nastavnog sata većina nastavnika kroz dijalog postavlja takva pitanja razredu, ali ne sudjeluju svi učenici u diskusiji. Zato bi pitanja tipa *Što ako...* trebala biti sastavni dio zadataka za individualni rad (npr. iz udžbenika i zbirke zadataka), domaćih zadaća te ispita znanja. Ne moraju to biti "teška pitanja", već se mogu odnositi i na osnove preko kojih se često prebrzo prelazi zbog obima propisanih sadržaja. Pritom moramo imati na umu da takva pitanja budu učenicima jasna i primjerena njihovoj dobi.

[1] Zahvaljujemo doc. dr. sc. Lidiji Cvikić na sugestijama i pomoći oko sastavljanja teksta o pogodbenim rečenicama. Veliko hvala i kolegici Željki Dijanić, prof., na idejama i primjerima iz nastave matematike.

Primjena pogodbenih rečenica u nastavi matematike i, općenito, promjene uvjeta nisu ništa drugo nego stvarni ili mentalni **eksperiment** koji se odnosi na učenje otkrivanjem. A učenje otkrivanjem je jedan od najvrednijih načina kako učenik konstruira novo znanje, što je osnova Piagetova konstruktivizma. Primjerice, učenik može eksperimentirati s pomoću softvera dinamičke geometrije i sam uočiti je li zbroj kutova u trokutu uvijek jednak bez obzira kako pomicali vrhove i mijenjali oblik trokuta, zatim što se događa u graničnim slučajevima i sl. Eksperiment može biti vođen i na džepnom računalu, primjerice učenik gleda nizove $1 : n$, pri čemu je n pozitivan decimalni broj koji se sve više približava nuli te se pita: *Što bi se dogodilo s količnikom kada bi n bio toliko mali da je (gotovo) jednak nuli?* Naravno, eksperimenti se mogu uspješno odvijati i korištenjem samo olovke i papira.

Pogodbena pitanja mogu funkcionirati i kao nadogradnja zadataka kroz koju se učenika uvodi u dublju analizu rješenja. Tako se analiza rješenja više ne svodi samo na provjeravanje točnosti, već se kroz pitanja tipa *Što bi bilo da nemamo trokut, već četverokut?* ili *Što bi bilo da n nije pozitivan?* (Brown i Walter, 2004.) učenika navodi da otkriva koje su ključne pretpostavke i ideje tog rješenja te može li se, i na koji način, promatrani problem i rezultat proširiti. Upravo ta refleksija i propitivanje mogućnosti generalizacije čine izrazito vrijednu priliku za daljnje učenje i unaprjeđenje matematičkog načina razmišljanja (Mason, Burton i Stacey, 2010.). U tom smislu, neizbježno je spominjanje matematičara Felixa Kleina[2] i njegove ideje funkcionalnog razmišljanja (Funktionales Denken) koje se odnosi na "matematičko razmatranje promjena" u smislu funkcija, ali i općenitije. Slično, Marton i Booth (1997.) ističu kako je uočavanje promjene, odnosno razlika, preduvjet učenja. Smatrajući kako fenomene doživljavamo kroz različite aspekte, različite *dimenzije varijacija*, oni ističu kako te dimenzije, da bi bile doživljene, moraju biti osviještene. Osim toga, različite osobe uz pojedine dimenzije mogu vezati različit *raspon mogućih vrijednosti* (Watson i Mason, 2005.). Pitanja poput *"Što će se dogoditi s nasuprotnom stranicom trokuta ako povećavamo unutrašnji kut trokuta? Kako se mijenja grafički prikaz kvadratne funkcije ako joj mijenjamo parametre?"* i sl. omogućavaju učenicima da sami započnu otkrivati različite dimenzije i moguće vrijednosti u njima te da kroz uočavanje promjena produbljuju svoje razumijevanje koncepata i odnosa među njima.

Sve spomenuto: eksperiment u nastavi matematike, učenje otkrivanjem, postavljanje pitanja tipa *Što ako...*, zatim konstruktivizam te nastojanja Felixa Kleina za vizualizacijom i funkcionalnim razmišljanjem – u današnjem vremenu tehnologije zajedno prirodno vode dinamici koju nam omogućuju softveri dinamičke geometrije i ostali programi. Ima li danas boljeg i atraktivnijeg mjesta za postavljanje pitanja tipa *Što će se dogoditi ako...* nego ispred ekrana uz interaktivno eksperimentiranje s vizualno i dinamički dostupnim matematičkim objektima? Vjerojatno nema, stoga je važno pametno koristiti dinamiku koju nude računala i tableti za učenje matematike. Primjerice, na internetskoj stranici `www.geogebratube.org` se nude mnogi interaktivni primjeri u kojima učenici kroz učenje otkrivanjem mogu bolje razumjeti geometrijske odnose[3].

Kad smo već kod računala, spomenimo važnost uvjeta i u programiranju. Struktura *if...then* je neizostavni dio svakog ozbiljnijeg programa. U pozadini, naravno, leži matematička logika sudova primijenjena na računarstvo. Očito su pogodbene rečenice, u ovom ili onom obliku, sastavni dio ljudskog života i razmišljanja. Tim više je potrebno da ih njegujemo u nastavi matematike na način da potiču logičko razmišljanje, razumijevanje matematičkih ideja, diskusiju, samostalnost i samouvjerenost učenika.

---

[2] Felix Klein je bio na čelu grupe koja je iznijela čuveni Meranski nastavni plan za matematiku iz 1905. godine o čijem sadržaju je bilo riječi u MiŠ-u br. 56.

[3] Za više informacija o mogućnostima servisa *GeoGebra Tube* pogledati u MiŠ-u br. 73.

Primjeri

Evo niza primjera matematičkih zadataka u obliku upitnih pogodbenih rečenica kroz cijelu obrazovnu vertikalu. U Primjeru 1 nalaze se primjeri tipa *Što ako...* vezani uz sadržaje razredne nastave, u Primjeru 2 za osnovnoškolsku predmetnu nastavu, a u Primjeru 3 se nalaze neki primjeri uvjetnih rečenica za srednju školu.

Primjer 1: Razredna nastava

Korištenje pogodbenih rečenica u razrednoj nastavi matematike treba poticati, ali s posebnim oprezom. Naime, u razrednoj nastavi mnogi učenici imaju poteškoća s vokabularom, govorom, čitanjem, razumijevanjem pitanja i razumijevanjem pročitanog. Ta ograničenja treba imati na umu kad se postavljaju pitanja u obliku pogodbenih rečenica. Zato pitanja tipa *A što ako...* za ovaj uzrast trebaju biti posve jasna i nedvosmislena, i ne preduga u broju riječi. Dobro je da ih se u početku što više postavlja usmeno, pogotovo ako učenik ima problema s čitanjem, a kasnije i pismeno. Kroz razgovor s učenikom treba utvrditi razumije li uopće učenik konstrukciju *Što bi bilo kada...* i na koji način odgovara na nju.

U a) dijelu svakog primjera za razrednu nastavu koji slijedi nalazi se tipičan tradicionalni zadatak, dok b) dio sadrži uvjet, pogodbenu rečenicu ili kondicional. Zadatke s mnogo teksta je u razrednoj nastavi pogodnije pitati usmeno.

- a) Koliko je 3 + 4?
  b) Koliki će biti zbroj ako prvi pribrojnik uvećamo za 1?
  c) Koliki će biti zbroj ako svaki pribrojnik uvećamo za 1? Objasni.
  d) Koliki će biti zbroj ako prvi pribrojnik uvećamo za 1, a drugi umanjimo za 1?
  e) Kako bi se sve mogli promijeniti pribrojnici da zbroj bude 5?
- a) Koji prirodni brojevi mogu doći na mjesto kvadratića tako da nejednakost $\square < 5$ bude istinita?
  b) Koji bi brojevi trebali doći na mjesto kvadratića kad bi se umjesto znaka $<$ nalazio znak $>$? Objasni.
- a) Koji broj treba staviti u kvadratić tako da jednakost $12 + \square = 20$ bude točna?
  b) Zamisli da umjesto pribrojnika 12 piše 13. Koji broj bismo tada stavili u kvadratić? Što bi se dogodilo da se prvi pribrojnik postupno smanjuje do 0? Koje brojeve bismo tada mogli staviti u kvadratić? Nacrtaj tablicu i dopuni je.
- a) Zapiši u obliku umnoška pa izračunaj $7+7+7+7$.
  b) Kako bi glasio zadatak kada bi umjesto pribrojnika 7 pisali pribrojnici 6? A pribrojnici 5?
- a) Provjeri da vrijedi jednakost $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$.
  b) Što bi se dogodilo kada bi umjesto znaka za množenje $\cdot$ tu bio znak za oduzimanje? Objasni.
  c) Što je s ostalim računskim operacijama? Napravi plakat na ovu temu.
- a) Podijeli s ostatkom $32 : 6$.
  b) Što bi se dogodilo s ostatkom kada bi djeljenik bio $33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40$? Što primjećuješ?
- a) Nacrtaj kvadrat $ABCD$.
  b) Koji geometrijski lik bi dobio/dobila kada bi se kvadratu stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ produljile za 1 cm? Objasni.
  c) Koji geometrijski lik bi dobio/dobila kada bi se kvadratu sve stranice produljile za 1 cm? Objasni.
- a) Nacrtaj neki trokut EFG.
  b) Koji geometrijski lik bi dobio/dobila kada bi se tom trokutu stranica $\overline{EF}$ produljila za 1 cm? Objasni.
  c) Koji geometrijski lik bi dobio/dobila kada bi se tom trokutu sve stranice produljile za 1 cm? Objasni.

Primjer 2: Predmetna nastava u osnovnoj školi

U ovom primjeru dominiraju zadatci za peti razred osnovne škole, ali se, uz preinake, zadatci mogu primijeniti i za ostale razrede.

- Zadana je jednakost $a + b = c$. Koliki bi bio zbroj kada bi se prvi pribrojnik uvećao za 1? Navedi primjer. Koliki bi bio zbroj kada bi se svaki pribrojnik uvećao za 1? Koliki bi bio zbroj kada bi se prvi pribrojnik uvećao za 1, a drugi umanjio za 1? Kako bi se sve mogli promijeniti pribrojnici da zbroj bude $c - 2$?
- Kakav će biti ostatak ako paran broj dijelimo s 2? A neparan? Objasni.
- Ako je u jednom kvadratnom metru 100 dm^2, koliko će dm^2 biti u 5 kvadratnih metara? Skiciraj i objasni.
- a) Kojim brojem treba pomnožiti 34 da dobijemo umnožak s nulom na mjestu jedinica?

  b) Kojim brojem treba pomnožiti 34 da dobijemo umnožak s tri nule na kraju? Objasni kako dobiti najmanji takav umnožak.
- Što bi se dogodilo kada bismo uklonili zagrade u ovim zadatcima? Objasni!

  a) $(24 : 6) + 24 - 3$;

  b) $32 : (1 + 7) + 2 + (3 \cdot 2) + 1$;

  c) $12 + (12 : 12) + 12 : (12 - 6)$.
- Dopuni rečenice:

  a) Ako je $12 \cdot 12 = 144$, onda je $1.2 \cdot 1.2 = 1.44$. Ako su oba faktora deset puta manja, onda će umnožak biti sto puta manji od početnog.

  b) Ako je $12 \cdot 12 = 144$, onda je $0.0012 \cdot 1.2 =$ ______. Ako je...

  c) Ako je $12 \cdot 12 = 144$, onda je $0.012 \cdot 0.012 =$ ______. Ako je...

  d) Ako je $12 \cdot 12 = 144$, onda je $1.2 \cdot 12 =$ ______. Ako je...
- Kakav treba biti nazivnik razlomka da bi se on mogao proširiti do dekadskog razlomka? Navedi nekoliko razlomaka koji se mogu proširiti do dekadskog razlomka i nekoliko koji ne mogu. Kakav treba biti brojnik razlomka kako bismo proširivanjem dobili dekadski razlomak?
- Koji broj treba pribrojiti broju 77 da bismo dobili broj djeljiv s 2? Koliko rješenja ima? Objasni svoj odgovor.
- Koliko parnih brojeva moramo zbrojiti da bi njihov zbroj bio neparan? Objasni.
- Koji broj treba oduzeti od 11 da bismo dobili broj djeljiv s 2? Koliko takvih brojeva ima?
- Ako je pravac a okomit na pravac b, a pravac b usporedan s pravcem c, u kakvom su međusobnom položaju pravci a i c? Odgovori i skiciraj.
- Ako dva kruga imaju jednake radijuse, hoće li oni imati i jednake dijametre? Objasni svoj odgovor.
- a) Nacrtaj točke A, B i C tako da ne leže na istom pravcu. Spoji ih dužinama. Koji geometrijski lik omeđuju nacrtane dužine?

  b) Što bi se dogodilo kada bi točke A, B i C ležale na istom pravcu? Nacrtaj sliku i odgovori.
- a) Zadan je trokut sa stranicama duljina 4 cm, 6 cm i 9 cm. Izračunaj opseg tog trokuta.

  b) Za koliko će se opseg trokuta promijeniti ako se najdulja stranica umanji za 1 cm?

  c) Za koliko će se opseg trokuta promijeniti ako se sve stranice umanje za po 1 cm?

  d) Što možeš reći o opsegu trokuta i trokutu ako se najdulja stranica uveća za 1 cm?
- a) Zadan je pravilan deseterokut sa stranicom duljine 3 cm. Za koliko će se promijeniti opseg tog mnogokuta ako mu se sve stranice uvećaju za 1 cm?

  b) Zadan je pravilan deseterokut sa stranicom duljine a. Za koliko će se promijeniti opseg tog mnogokuta ako mu se sve stranice uvećaju za 1 cm?

  c) Zadan je pravilan deseterokut sa stranicom duljine a. Za koliko će se promijeniti opseg tog mnogokuta ako mu se sve stranice uvećaju za k cm?

Primjer 3: Srednja škola

- Ako imaš zadan prirodan broj n i nađeš sve njegove djelitelje, jesu li ti djelitelji onda i djelitelji dvostruko većeg broja $2 \cdot n$? Navedi nekoliko primjera pa odgovori.
- a) Svaka dva jednakostranična trokuta su slična. Zašto?

  b) Za koje bismo još osnovne geometrijske likove mogli izreći analognu tvrdnju, tj. da svaka dva budu slična. Obrazloži!
- a) Zadana je kvadratna funkcija $f(x) = 4x^2 - 3$. Je li ta funkcija parna ili neparna?

  b) Kakvi bi trebali biti koeficijenti kvadratne jednadžbe $f(x) = ax^2 + bx + c$ da bi kvadratna funkcija bila parna? Navedi primjer i protuprimjer.

  c) Možeš li promijeniti jednu vrijednost parametra u zapisu funkcije iz a) zadatka tako da funkcija postane neparna? Koju? Objasni.
- a) Zbroji kompleksne brojeve $1 - i$ i $3 + i$. Koji broj je kompleksno konjugiran tom zbroju?

  b) Što ćeš dobiti ako najprije konjugiraš ta dva broja, a zatim zbrojiš njihove konjugate?

  c) Što će se dogoditi ako odabereš neka druga dva broja?
- a) Nacrtaj graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

  b) Kako će izgledati graf funkcije ako slobodni član uvećaš za 1? Što ako ga uvećaš za 2? A za 3?

  c) Što se događalo s tjemenom pripadne parabole kako si mijenjao/mijenjala slobodni član?

  d) Što se događalo s nul-točkama pripadne parabole kako si mijenjao/mijenjala slobodni član?

  e) Možeš li nešto reći o odnosu nul-točaka i tjemena?
- a) Ako funkciji u zapisu $f(x) = x^2 - 4x - 6$ promijenimo slobodni član, što će se dogoditi s njenim grafom? Što će se dogoditi s tjemenom pripadne parabole, a što s nul-točkama?

  b) Za koju vrijednost slobodnog člana bi ti bilo najlakše nacrtati graf? Zašto? Nacrtaj graf u tom slučaju.

  c) Možeš li dobiti graf funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 6$ s pomoću grafa funkcije iz b) zadatka? Kako ćeš dobiti tjeme parabole za funkciju f?
- a) Neka je funkcija $f : \{a, b, c, d\} \to \{i, j, k, l\}$ zadana pravilom $f(a) = j$, $f(b) = k$, $f(c) = i$, $f(d) = l$. Prikaži funkciju f s pomoću dijagrama.

  b) Ako bi okrenuo strelice u dijagramu, bi li opet dobio funkciju? Što bi bila domena, a što kodomena?

  c) Kako bi riječima opisao pravilo pridruživanja za tu novu funkciju?

  d) Što bi se dogodilo kada bismo stavili $f(c) = j$, a ostala bi pravila ostavili ista?
- a) Nacrtaj pravac p, točku T koja leži izvan pravca te točku A koja leži na pravcu. Kolika je udaljenost točaka T i A?

  b) Odaberi neku drugu točku na pravcu p. Kolika je njena udaljenost do točke T – jednaka prvoj ili različita?

  c) Možeš li odabrati točku na pravcu p čija je udaljenost do točke T manja od udaljenosti točke A? Možeš li naći točku čija je udaljenost veća?
- Razmisli kako napraviti posudu u koju stane točno 2 litre tekućine. Koje si tijelo odabrala? Koje bi bile njegove dimenzije?
- a) Na stolu stoji čaša od 2 dl. Koliko bi mogla više vode natočiti ako bi umjesto nje uzela dvostruko višu čašu? U grupi provedite diskusiju o svim mogućnostima.

  b) Koliko bi mogla više vode natočiti ako bi uzela dvostruko širu čašu? U grupi provedite diskusiju o svim mogućnostima.
- a) Nacrtaj jediničnu kružnicu. Možeš li na njoj naći točku koja ima y-koordinatu $\frac{1}{2}$?

  b) Koliko ima takvih točaka? Kolike kutove s pozitivnom x-poluosi zatvaraju polupravci kroz te točke?

c) Koje ćeš točke dobiti ako umjesto $\frac{1}{2}$ uzmeš $\frac{2}{3}$? Koliki su tada odgovarajući kutovi?

d) Što će se dogoditi ako uzmeš $\frac{4}{5}$?

e) Možeš li reći nešto o odnosima točaka u b) zadatku? A u c) i d) zadatku? Što se događa s kutovima? Možeš li kod njih naći neku pravilnost?

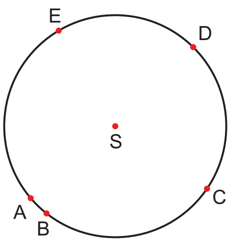
Pogodbene rečenice i osnovni sadržaji

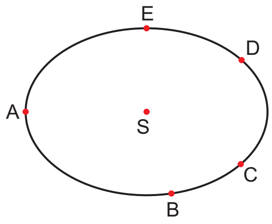
Rečenice tipa *Što ako...* pomažu u promišljanju i zaključivanju vezano i za osnovne matematičke sadržaje. Iz tog je razloga važno da ih primjenjujemo i na najjednostavnijim zadatcima. Primjerice, učenici upoznaju kružnicu kao "skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne zadane točke, tj. središta". Tu možemo uvesti dodatne crteže na kojima su uz kružnicu nacrtani elipsa, rub pravokutnika, rub kvadrata i ostalih mnogokuta te razne zatvorene krivulje. Uz crtež se pitamo *Što ako imamo zadan ovaj skup točaka? Bi li i za njega vrijedilo da su mu sve točke jednako udaljene od središta? Provjeri!* Ovakve aktivnosti potpomažu razumijevanje pojma kružnice ako se učenik uhvati mjerenja udaljenosti od zadane točke ("središta") do točaka zadane krivulje ili ruba mnogokuta. Naravno, dinamična geometrija i u ovom slučaju itekako može pomoći u shvaćanju pojma kružnice.

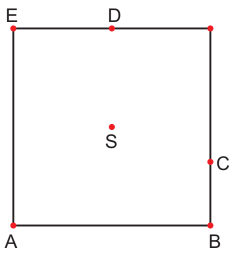
Zahtjev da se više posveti pažnja osnovnim konceptima slaže se s teorijom austrijskog metodičara matematike Rolanda Fischera (2003.) koji se, između ostaloga, bavio važnošću matematike i obrazovanja za društvo. On dijeli stručno dobivene kompetencije na osnovna znanja, operiranje i refleksivno znanje. Nadalje, on govori da u današnjoj nastavi matematike prevladavaju operativna znanja, iako bi ciljano znanje tzv. obrazovanih laika trebalo biti osnovno znanje i refleksivno znanje. Operativna znanja trebali bi u velikom dijelu prepustiti tzv. *ekspertima*, npr. računalima. Osnovno znanje obuhvaća osnovno poznavanje koncepata, pojmova i oblika prikazivanja te sposobnosti vezane uz njih. Refleksija se odnosi na promišljanje i shvaćanje dubljeg značenja pojmova i metoda, čemu oni služe, koje su njihove granice i sl. Pravilno usmjerena pitanja tipa *Što bi bilo kada bi...* pomažu upravo usvajanju osnovnog znanja i poticanju na refleksiju.

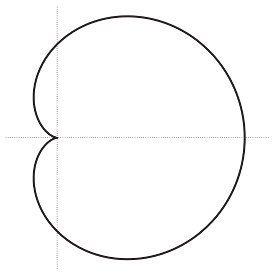
Zaključak

Postavljanje pitanja u obliku pogodbenih rečenica može pomoći u boljem razumijevanju matematičkih sadržaja. Pitanja tipa *Što bi bilo kada bismo...* potiču na razmišljanje o odnosima među matematičkim pojmovima, suočavaju učenika s graničnim slučajevima i potiču komunikaciju o matematici. Takva pitanja bi se s jedne strane trebala usmjeravati prema osnovnim matematičkim pojmovima i jednostavnim sadržajima, a s druge strane i prema refleksivnom znanju. Eksperimentalna i otvo-









rena priroda ovakvih pitanja čine ih dostupnima za odgovaranje većem broju učenika. Ta dostupnost nam se čini važnom u stvaranju pozitivnog stava prema učenju matematike. Ona također doprinosi shvaćanju matematike kao žive i otvorene discipline, a ne kao dovršenog, zatvorenog sustava. Pritom, naravno, treba imati na umu dob učenika i zadavati zadatke u skladu s dobi i kognitivnim razvojem.

Istraživanja udžbenika i nastave pokazuju da u Hrvatskoj ovakav način pitanja nije čest, kao ni zadatci otvorenog tipa. Ovdje veliku ulogu zasigurno ima tzv. kulturna koherencija (Heymann, 1996.), tj. praksa da nastavnik najradije svoju nastavu, svjesno ili nesvjesno, radi onako kako je njega učio njegov nastavnik. U takvoj praksi ostaje malo prostora za promjene jer se nerado uvodi nešto novo, pogotovo u kulturu poučavanja. Uz to, kvalitetna pitanja oblika *Što misliš, što bi bilo kada bi...* može sastaviti samo osoba sigurna u svoje znanje i ciljeve i koja će se moći nositi sa svim oblicima učeničkih odgovora na ova uvjetna pitanja. To znači da je i u ovom segmentu obrazovanje budućih nastavnika izuzetno važno. Pritom je potrebno posebnu pažnju posvetiti matematičkom i metodičkom obrazovanju budućih učitelja primarnog obrazovanja, kako bi se educirali i stekli znanje i iskustvo u postavljanju ovakvih pitanja, ali i pretpostavili moguće učeničke odgovore.

Pravila:

- Gdje god je moguće i smisleno, postaviti pitanja s matematičkim sadržajima u obliku pogodbenih rečenica.
- Poticati pitanja tipa *Što ako...* i u usmenom i u pisanom obliku.
- U svakoj domaćoj zadaći, vježbi i provjeri znanja bi se trebalo naći bar jedno pitanje otvorenog tipa (a gdje god je moguće i pitanja tipa *Što ako...*).
- Pogodbene rečenice za sve (ne samo za najbolje učenike)!
- Udžbenici trebaju sadržavati znatniji udio zadataka otvorenog tipa i onih u obliku pogodbenih rečenica.

LITERATURA

1/ S.I. Brown, M.I. Walter, *The Art of Problem Posing*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2004.

2/ R. Fischer, *Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft*, Erziehung und Unterricht 5–6, (2003.), str. 559–566.

3/ D. Glasnović Gracin, Lj. Jukić Matić, *Schulbuch als Teil des implementierten Curriculums*, 48. Jahrestagung der GDM (2014.), Koblenz, Deutschland.

4/ D. Glasnović Gracin, *Requirements in Mathematics Textbooks and PISA Assessment*, neobjavljena doktorska disertacija (2011.), Alpen-Adria-Universität, Klagenfurt.

5/ H. W. Heymann, *Allgemeinbildung und Mathematik*, Weinheim: Beltz Verlag, 1996.

6/ J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1986.

7/ F. Marton, S. Booth, *Learning and Awareness*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1997.

8/ J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Thinking Mathematically* (2nd. ed.), Harlow: Pearson, 2010.

9/ B. Rittle-Johnson, M. Schneider, *Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics*, u: R. Cohen Kadosh, & A. Dowker, (ed.), *Oxford handbook of numerical cognition*, Oxford University Press, 2013.

10/ J. Silić, I. Pranjković, *Gramatika hrvatskoga jezika za gimnazije i visoka učilišta*, Zagreb: Školska knjiga, 2005.

11/ A. Watson, J. Mason, *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2005.