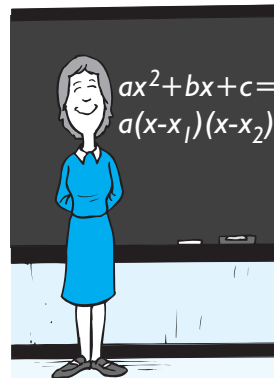


Rastav kvadratnog trinoma na faktore

Sanja Varošaneć*, Zagreb



U prvom razredu srednje škole pojavljuje se problem rastava trinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$ na faktore. Isti taj problem javlja se i u drugom razredu u cjelini “Kvadratna jednadžba”, ali se u tom trenutku problem lako rješava, jer se koristi rastav

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1, x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. No, u prvom razredu učenik još ne vlada rješavanjem kvadratne jednadžbe u svojoj njezinoj općenitosti, pa pri rastavljanju trinoma na faktore treba pribjeći nekim drugim metodama.

Jedna od tih metoda jest nadopunjavanje dijela trinoma do potpunog kvadrata, a druga metoda se sastoji u tome da se srednji član bx napiše u obliku sume dva pribrojnika, te se zatim nakon pogodnog grupiranja izvrši faktorizacija.

Ilustrirajmo obje metode na jednom primjeru.

Primjer 1. Trinom $6x^2 - 7x - 5$ napišimo u obliku umnoška.

I. način. Nadopuna do potpunog kvadrata.

Izlučimo koeficijent vodećeg člana, te dodajmo i oduzmimo kvadrat polovine koeficijenta uz x :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 5 &= 6\left(x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{5}{6}\right) \\ &= 6\left(x^2 - \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \frac{5}{6}\right) \\ &= 6\left[\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} - \frac{5}{6}\right] \\ &= 6\left[\left(x - \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{169}{144}\right] \\ &= 6\left[\left(x - \frac{7}{12}\right) - \frac{13}{12}\right]\left[\left(x - \frac{7}{12}\right) + \frac{13}{12}\right] \\ &= 6\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 3\left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x - 5)(2x + 1). \end{aligned}$$

II. način. Rastav srednjeg člana.

Umnožak koeficijenta vodećeg člana i slobodnog člana je $a \cdot c = 6 \cdot (-5) = -30$. Rastavimo taj umnožak na dva faktora m i n .

$m \cdot n$	$-1 \cdot 30$	$1 \cdot (-30)$	$-2 \cdot 15$	$2 \cdot (-15)$
$m + n$	29	-29	13	-13

$m \cdot n$	$-3 \cdot 10$	$3 \cdot (-10)$	$-5 \cdot 6$	$5 \cdot (-6)$
$m + n$	7	-7	1	-1

Među svim ovim umnošcima izdvojimo onaj kojemu je zbroj faktora jednak koeficijentu uz x . U ovom slučaju to je umnožak $3 \cdot (-10)$. Dakle, srednji član $-7x$ zapisat ćemo kao $3x - 10x$. Sad imamo

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 5 &= 6x^2 + 3x - 10x - 5 \\ &= 3x(2x + 1) - 5(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(3x - 5). \end{aligned}$$

Dakle, druga se metoda sastoji u tome da se koeficijent srednjeg člana napiše kao suma dva pribrojnika čiji umnožak je jednak umnošku koeficijenata vodećeg i slobodnog člana.

Zadržimo se na drugoj metodi, jer na prvi pogled nije baš jasno možemo li uvijek učiniti ovaj rastav. Zamijetimo da trinomi koje rastavljamo u 1. razredu zadovoljavaju ove uvjete: koeficijenti a , b i c su cijeli brojevi, $a \neq 0$, a nultočke x_1 i x_2 su racionalni brojevi. Također, možemo smatrati da su b i c različiti od 0, budući da u protivnom trinom rastavljamo ili kao razliku kvadrata ili izlučivanjem varijable x .

Navedimo neke od posljedica ovih uvjeta.

Budući da su $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}$, tj.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbf{Q}$$

i $a, b \in \mathbf{Z}$, slijedi da je $\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbf{Q}$. Ali, budući da je izraz $b^2 - 4ac$ cjelobrojan, slijedi da je $\sqrt{b^2 - 4ac}$ također cijeli broj. Nadalje, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ je iste parnosti kao i broj b , pa su $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ cijeli brojevi, tj. ax_1, ax_2 su cijeli brojevi.

Riješimo sada pitanje postojanja brojeva m i n takvih da je

$$\begin{aligned} m \cdot n &= ac \\ m + n &= b. \end{aligned}$$

Ovo je sustav od 2 jednadžbe s dvije nepoznanice m i n , pa izražavanjem nepoznanice n iz druge jednadžbe i uvrštavanjem u prvu

dobivamo

$$\begin{aligned} m \cdot (b - m) &= ac \\ m^2 - bm + ac &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $m_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$, tj. $m_{1,2} = -ax_{1,2}$. Dakle, m_1 i m_2 su cijeli brojevi, a time i n_1 i n_2 . Lako se vidi da je $m_1 = n_2$ i $m_2 = n_1$, pa možemo govoriti o jedinstvenim brojevima m i n koji zbrojeni daju b , a pomnoženi $a \cdot c$. Štoviše, ako su $a, b, c \in \mathbf{Z}$ i $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}$, brojevi m i n su cijeli.

Dakle, trinom sad rastavljamo ovako

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 + mx + nx + c \\ &= d_1x \left(\frac{a}{d_1}x + \frac{m}{d_1} \right) + \frac{nd_1}{a} \left(\frac{a}{d_1}x + \frac{ac}{nd_1} \right) \end{aligned}$$

gdje je $d_1 = D(a, m)$.

Jesmo li ovim grupiranjem i izlučivanjem dobili jednake izraze u zagradama?

Treba provjeriti vrijedi li $\frac{m}{d_1} = \frac{ac}{nd_1}$.

Iz uvjeta $mn = ac$ slijedi $m = \frac{ac}{n}$, odakle je očito da vrijedi $\frac{m}{d_1} = \frac{ac}{nd_1}$. Uočimo da su $\frac{a}{d_1}, \frac{m}{d_1}$, pa time i $\frac{ac}{nd_1}$ cijeli brojevi.

Zanimljivo je da je i $\frac{nd_1}{a}$ cijeli broj. Naime, budući da je $d_1 = D(a, m)$, slijedi da postoji cijeli broj a_1 takav da je $a = a_1d_1$ i $D(a_1, m) = 1$. Dakle, $\frac{nd_1}{a} = \frac{nd_1}{a_1d_1} = \frac{n}{a_1}$. Iz $ac = m \cdot n$ i $a_1|a$ slijedi $a_1|ac$, tj. $a_1|mn$, pa uz činjenicu da je $D(a_1, m) = 1$ slijedi da $a_1|n$, tj. $\frac{n}{a_1}$ je cijeli broj.

Sad imamo

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \\ &= d_1x \left(\frac{a}{d_1}x + \frac{m}{d_1} \right) + \frac{nd_1}{a} \left(\frac{a}{d_1}x + \frac{m}{d_1} \right) \\ &= \left(\frac{a}{d_1}x + \frac{m}{d_1} \right) \left(d_1x + \frac{nd_1}{a} \right), \end{aligned}$$

pri čemu su svi koeficijenti linearnih izraza cijeli brojevi, te smo zadani trinom prikazali u obliku umnoška.

Ovaj postupak uz manje modifikacije, provediv je i za trinome čiji koeficijenti su realni, pa čak i kompleksni brojevi, no tada se općenito gubi cjelobrojnost koeficijenata u rastavu.

Pokažimo na još nekoliko primjera ovu metodu.

Primjer. Rastavimo na faktore

a) $2x^2 + 5x + 2$;

b) $x^2 + x - 2$;

c) $14x^2 + 19xy - 3y^2$.

Rješenje. a) $a = 2, b = 5, c = 2, a \cdot c = 4$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} m \cdot n & 1 \cdot 4 & -1 \cdot (-4) & 2 \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) \\ \hline m + n & 5 & -5 & 4 & -4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 2 &= 2x^2 + x + 4x + 2 \\ &= x(2x + 1) + 2(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

b) $a = 1, b = 1, c = -2, ac = -2$

$$\begin{array}{c|c|c} mn & 1 \cdot (-2) & -1 \cdot 2 \\ \hline m + n & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= x^2 - x + 2x - 2 \\ &= x(x - 1) + 2(x - 1) \\ &= (x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

c) $a = 14, b = 19, c = -3, ac = -42$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} mn & 1 \cdot (-42) & -1 \cdot 42 & 2 \cdot (-21) & -2 \cdot 21 \\ \hline m + n & -41 & 41 & -19 & 19 \end{array}$$

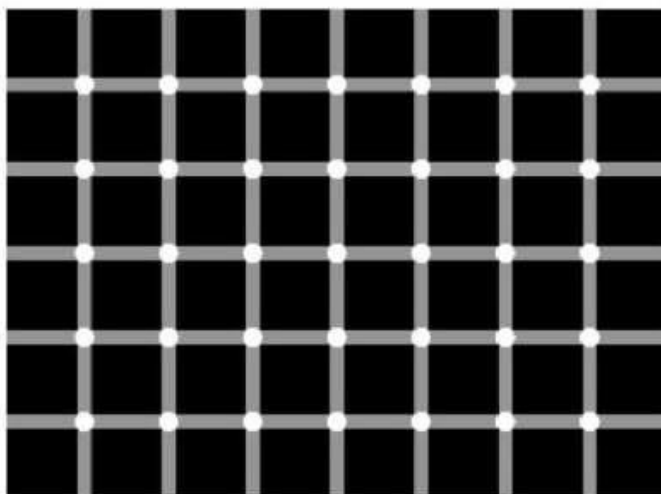
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} mn & 3 \cdot (-14) & -3 \cdot 14 & 6 \cdot (-7) & -6 \cdot 7 \\ \hline m + n & -11 & 11 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 14x^2 + 19xy - 3y^2 &= 14x^2 - 2xy + 21xy - 3y^2 \\ &= 2x(7x - y) + 3y(7x - y) \\ &= (7x - y)(2x + 3y). \end{aligned}$$

* * *

Zadatak

*Naš vjerni čitatelj Polko Mironijo poslao nam je ovaj zadatak:
Koliko je na ovoj slici crnih točkica?*



Zaista, koliko ih je? Za svaku sigurnost ponovite prebrojavanje.