Pčele kao tema na satu matematike

*Gabriella Ambrus**,
Budimpešta, Mađarska

Kako se pčele uklapaju u sat matematike? Nisu li prikladnije za sat biologije? Zapravo jesu, ali ne isključivo. Ti marljivi, simpatični, mali insekti i njihov zanimljiv život i proizvodi mogu biti korisni i na satu matematike. U nastavku teksta bit će prikazani prijedlozi, mogućnosti i didaktički komentari o pčelama kao zanimljivoj temi kroz koju se može naučiti matematika.

Nastava matematike provodi se kroz zadatke. Mnogi zadatci formulirani su kao tekstualni, neki od njih i kroz situacije. U osnovnoškolskoj dobi te situacije se često odnose na dječju svakodnevicu u koju spada i priroda, biljke, životinje te razna uz to povezana opažanja. Svijet pčela predstavlja pravo čudo, i to ne samo za djecu: ti mali fantastično oblikovani insekti imaju vrlo organizirani život. Postoji i puno bajki o životu pčela, u kojima je riječ o marljivim, pametnim pčelicama. (Manje se priča o bolnim ubodima pčela, ali i oni mogu biti korisni.)

Iako stjecanje osobnih iskustava s pčelama *(i pčelarstvom)* može biti motivirajuće i poticajno u svakom smislu, rijetko za to postoji prilika. No, zato je tu internet koji nudi puno zanimljivih informacija o pčelama i pruža uvid u njihov život unutar košnice. Isplati se posjetiti stranicu HOBOS** navedenu u fusnoti na kojoj su sadržaji dostupni na engleskom i njemačkom jeziku. Tamo se mogu naći razni podatci o pčelama i provesti razna opažanja a da se ne bavimo pčelarstvom.

Zadatci na temelju promatranja pčela i košnice

Uz pomoć mnoštva podataka koji se nude na spomenutoj stranici, moguće je formulirati sljedeći zadatak:

---

* Dr. Gabriella Ambrus, ELTE, Matematikatanítási és Módszertani Központ, `ambrusg@cs.elte.hu`
** `www.hobos.de/de/studenten/hobos-daten/bienenstock.html`

Zadatak. *Koliko pčela u jednom danu uđe i izađe iz košnice? Što primjećuješ? Kako objašnjavaš svoja opažanja?*

Ovdje se ne radi samo o zbrajanju, koje se također pritom vježba, nego o više toga. O rezultatu se treba promišljati i povezati ga s drugim "znanjima". Na primjer, može se uočiti da je više pčela izašlo iz košnice nego što je ušlo u nju. Moguće objašnjenje je da je nekolicina pčela uginula na svojim putovanjima. To se često događa u proljeće sa starim pčelama, kada na svijet dolaze nove mlade pčele. Mogućnost da se pčele izgube gotovo je isključena jer se one jako dobro snalaze u prostoru te ne ulaze u druge košnice (o tome se može pročitati na spomenutoj internetskoj stranici i drugim izvorima).

Drugi zadatak može biti sljedeći:

Zadatak. *Na slici možeš vidjeti saće. Možeš li izbrojiti koliko je ćelija? Koji je najbolji način da to otkriješ?*

Slika 1. Dio saća

Važno je odrediti dobru metodu za izračunavanje broja ćelija te smisliti kako tretirati ćelije koje nisu čitave. Učenici se tako mogu odlučiti da svaku ćeliju koja se vidi više od polovice broje kao cijelu, a one koje se vide manje od polovice broje kao pola ćelije. Brojiti se može po redovima ili se slika može podijeliti na više jednakih dijelova – tada se prebroje sve ćelije u jednom dijelu slike i dobiveni broj pomnoži s ukupnim brojem dijelova.

Zadatci povezani s informacijama o pčelama

Mnogo je mogućnosti kako prikupiti informacije o pčelama i iskoristiti ih kao podlogu za zadatak. Tako se formuliraju zadatci s realnim sadržajem.

Zadatak. *Pčele radilice sakupljaju pelud i pčelinji nektar. Jedna radilica teži oko 70 mg i može ponijeti oko 40 mg. Koliko bi ti mogao ponijeti kada bi bio pčela?*

Ovdje se radi o primjenjivim, realnim zadatcima. Odgovor ne ovisi o tome kolika je masa učenika, nego o modelu računanja. Može se dopustiti odstupanje od 5 mg i reći da pčela može ponijeti otprilike pola svoje težine, pa tako i djeca. Učenik koji ima masu otprilike 35 kg može zaključiti da bi kao pčela mogao ponijeti otprilike 20 kg, jer pčela od 35 mg može ponijeti otprilike 20 mg. U višim razredima to se može izračunati s pomoću omjera/razmjera.

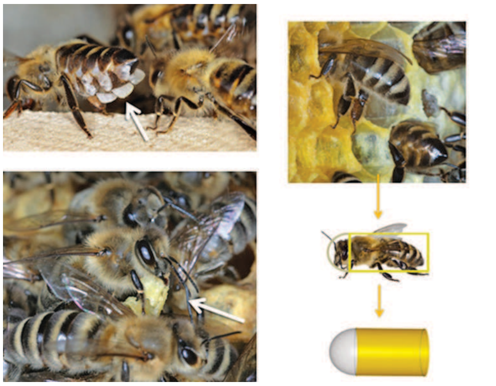
Zadatak. *Budući da im i za vlastite potrebe treba puno meda, obitelj pčela proizvede oko 30–40 kg iskoristivog meda. Za to trebaju u košnici sakupiti dvostruko više nektara. Koliko izlazaka je potrebno da bi se proizvelo toliko meda?*

Ovaj zadatak pruža mogućnost računanja s velikim brojevima. S obzirom na podatke iz prethodnih zadataka može se izračunati da je za proizvodnju 40 kg meda potrebno 2 milijuna izlazaka iz košnice. Ovaj rezultat poklapa se s podatcima iz stručne literature. Kada su u pitanju realni rezultati, moguće je provjeriti na internetu jesu li točni i po potrebi ih korigirati i ponovno izračunati.

Zadatak. *Pčelinji vosak važna je sirovina u kozmetičkoj i farmaceutskoj industriji. Za proizvodnju 1 dag voska potrebno je 1500 pčela koje će ga proizvesti tijekom svog kratkog života. Radilica živi oko 35 dana i otprilike 10 dana proizvodi vosak. Koliko voska dnevno proizvede 1500 pčela?*

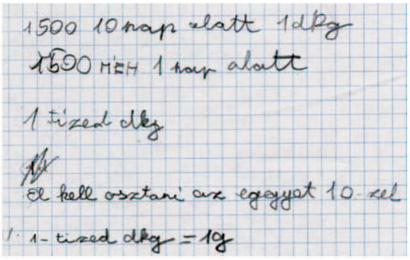
Tekstualni zadatci učenicima često stvaraju probleme zbog potrebe temeljitog razumijevanja teksta. Kako da učenica četvrtog razreda riješi ovakav zadatak? U nastavku ćemo se posvetiti tome. (Zanimljivi rezultati vezani uz tekstualne zadatke s realnim sadržajem mogu se naći npr. kod Csikos i suradnici [4].)

Ispitivanje: Učenica se dobrovoljno javila za rješavanje zadatka s pčelama. Dobra je u matematici, no tek je završila četvrti razred osnovne škole. Zadatak je dobila u slikovnom obliku, a ispod je bio naveden tekst (slika 2).



Slika 2. Zadatak za ispitivanje (Izvor slika je HOBOS, vidi prije.)

Učenica je imala poteškoća s razumijevanjem teksta. Prvo je htjela podijeliti 1500 s 35, pa s 10. Shvatila je da to nije "pametno", pa je u konačnici došla do toga da desetodnevnu proizvodnju mora podijeliti s 10.



1500 10 nap alatt 1dkg
1500 MÉH 1 nap alatt
1 tized dkg
el kell osztani az egyet 10-zel
1- tized dkg = 1g

Slika 3. Rješenje zadatka s pčelinjim voskom učenice 4. razreda

U sljedećem zadatku prikazan je model koji omogućuje osnovnoškolcu da shvati koliko je teška jedna pčela:

Zadatak. *Na lijevoj strani (polužne) vage nalaze se "rasterećene" pčele, a na desnoj 1 gumeni medvjedić (1 medvjedić teži oko 2 g). Koliko pčela je potrebno dodati na desnu stranu da bi vaga došla u ravnotežu?* (Ideja: Anke Wagner)

S ovim zadatkom može se povezati gradivo o srednjoj vrijednosti.

Zadatci vezani uz pčelinje saće

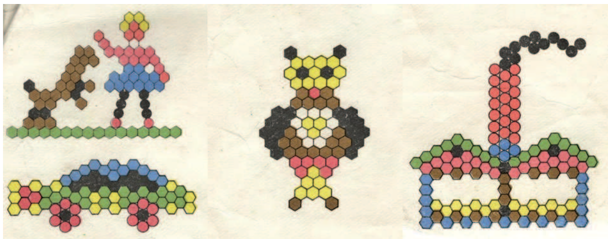
Pčelinje saće na prvi pogled izgleda kao ploča sastavljena od pravilnih šesterokuta što je zanimljiva konstrukcija i zahvalna tema za satove matematike. Zadatci o saću mogu biti sljedeći:

- zadatci o broju ćelija u saću (vidi prije)
- zadatci o građi i konstrukciji saća
- zadatci vezani uz nastajanje i upotrebu saća
- zadatci povezani sa saćem, npr. zadatci vezani uz popločavanje.

Trodimenzionalna konstrukcija saća kao tema na satu matematike moguća je tek u srednjoj školi (vidi Tautz, Ruppert i Wörler, [5]).

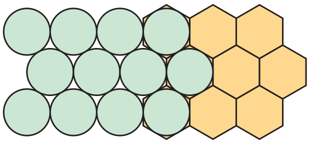
Pravilni šesterokuti kao ćelije saća mogu biti inspiracija za brojne eksperimente, opažanja i zadatke iz područja geometrije.

Primjerice, postoje dječje igre u kojima se uz pomoć šesterokuta rade razne konstrukcije. Moguće je napraviti lijepe slike i mozaike koji se mogu promatrati i kroz "matematičke naočale" (slika 4).



Slika 4.

Moguće se osvrnuti i na kružnice upisane pravilnim šesterokutima, kao što je prikazano na slici 5. U nižim razredima tu nije moguće još ništa matematički argumentirati, nego samo pokazati i promatrati s pomoću slika, a onda u višim razredima detaljnije analizirati odnose na slici.



Slika 5.

Sljedeći zadatak bavi se transformacijama i simetrijama:

Zadatak. *Nacrtaj jednu ćeliju saća na papiru i izreži je. Opiši svojstva te ćelije. Kako bi ti nazvao ćeliju?*

Ćelija se može imenovati na različite načine; moguće je da učenici već poznaju i koriste naziv šesterokut, ali mogu i sami smišljati različite nazive koji bi bili vezani uz pčele. Takvi "neslužbeni" nazivi mogu se nastaviti upotrebljavati i promijeniti u bilo kojem trenutku.

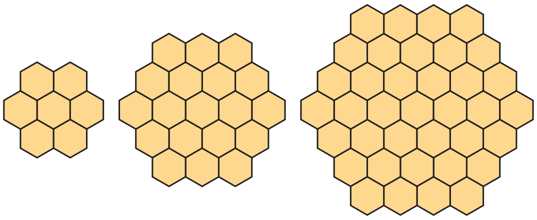
U brojnim udžbenicima možemo pronaći šesterokut kao predmet istraživanja, primjerice na slici 6.

Slika 6. Šesterokut kao dio različitih uzoraka. (Tekst zadatka: Nađite točku zrcaljenja na sljedećim slikama!) (C. Neményi/Káldi: Matematika 3., 4. izdanje, 2008 NTK, S.164)

Kao što smo već vidjeli, kada se šesterokuti, odnosno ćelije kombiniraju, nastaju zanimljivi objekti koji se također mogu shvatiti kao dio saća.

Kao analogija šahovskoj ploči mogu se izraditi i razne ploče sastavljene od šesterokuta koje potom mogu biti temelj za različite zadatke.

Zadatak. *Ovdje možemo vidjeti dijelove saća koje možemo shvatiti kao ploče sastavljene od šesterokuta. Navedi različite načine kako od ploče sa "stranicom" od dvije ćelije mogu nastati ploče sa "stranicom" od triju ili četiriju ćelija. Možeš li nastaviti niz?*



Slika 7. Ploče sa "stranicom" od 2, 3 i 4 šesterokuta

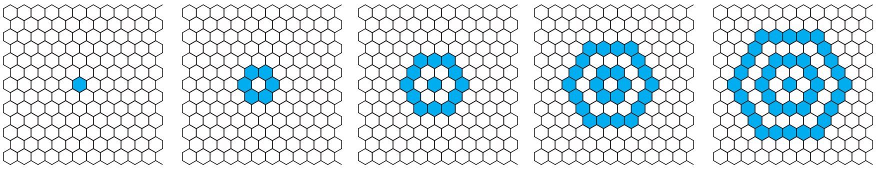
Zadatak. *Pogledaj koliko je ćelija na prikazanim pločama i odredi koliko ih se nalazi na pločama sa "stranicom" od 5 i 6 šesterokuta.*

Mnogo je načina kako od jedne ploče može nastati druga. Jedan od njih je postavljanje većih "šesterokutnih prstenova" oko prethodne ploče. S pomoću prstenova može se odgovoriti i na drugo pitanje. Sa svakim novim prstenom broj ćelija na svakoj stranici ploče povećava se za 1 (tj. ukupno za 6 novih šesterokuta). To znači da se obodni prsten ploče sa "stranicom" od triju šesterokuta sastoji od 6+6 ćelija, odnosno da je ukupan broj ćelija na toj ploči $7+(6+6)=19$.

Broj ćelija ploče sa "stranicom" od 4 šesterokuta je $19+(6+6+6)=37$, od 5 šesterokuta je $37+(6+6+6+6)=61$, a od 6 šesterokuta je $61+(6+6+6+6+6)=91$.

Zapažanje takvih pravilnosti razvija induktivno mišljenje. Tako se u višim razredima može izračunati broj ćelija na ploči sa "stranicom" od n ćelija (n je pozitivan cijeli broj):

$$\begin{aligned}1+6&+(6+6)+(6+6+6)+\ldots+(n-1)6\\&=1+1\cdot 6+2\cdot 6+\ldots+(n-1)6\\&=1+6(1+2+\ldots+n-1)\\&=1+6\frac{n-1+1}{2}(n-1)=1+3n(n-1).\end{aligned}$$



Slika 8. Zadatak iz mađarskog časopisa KÖMAL
Izvor: `http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=C1199&l=hu`

Sljedeći zadatak na ovu temu nedavno je izašao u sklopu natjecanja za srednjoškolce u mađarskom časopisu “Komal”.

Zadatak. *Na gornjoj slici prikazan je niz uzoraka načinjenih od šesterokuta. Broj tamnih šesterokuta je redom 1, 6, 13, 24, 37. Zsofi (mađarsko ime za djevojku) je dokazala da je broj tamnih šesterokuta na uzorcima pod neparnim rednim brojevima kvadratna funkcija. Koliko tamnih šesterokuta ima na uzorku pod rednim brojem 99?*

Zsofi se u rješavanju koristila jednadžbom $ax^2 + bx + c = f(x)$, koja se također može naći na spomenutoj mrežnoj stranici. Ako je $f(1) = 1$, $f(3) = 13$, $f(5) = 37$, onda nakon uvrštavanja u jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 9a + 3b + c &= 13 \\ 25a + 5b + c &= 37. \end{aligned}$$

Odavde se izračuna da je $a = 1.5$, $b = 0$, $c = -0.5$.

Stoga je $f(n) = 1.5n^2 - 0.5$, iz čega dobijemo da je $f(99) = 1.5 \cdot 99^2 - 0.5 = 14\,701$.

Zadatak se može riješiti i na drugi način, uz primjenu ranije spomenutog rješenja zadatka o broju ćelija na ploči sa “stranicom” od n šesterokuta: $1 + 3n(n-1) = f(n)$. Zbrojimo li

$$f(99) - f(98) + f(97) - f(96) + \ldots + f(1),$$

dobit ćemo broj zatamnjenih šesterokuta na ploči sa “stranicom” duljine 99 ćelija. Ako raspišemo izraz

$$\begin{aligned} &1 + 3 \cdot 99^2 - 3 \cdot 99 - (1 + 3 \cdot 98^2 - 3 \cdot 98) \\ &\quad + (1 + 3 \cdot 97^2 - 3 \cdot 97) - \ldots + (1 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1), \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} &1 + 3(99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2) \\ &\quad - 3(99 - 98 + 97 - 96 \ldots + 3 - 2 + 1). \end{aligned}$$

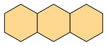
Tako je

$$\begin{aligned} &3(197 + 193 + \ldots + 9 + 5 + 1) - 3(49 \cdot 1 + 1) + 1 \\ &\quad = 14\,850 - 150 + 1 = 14\,701, \end{aligned}$$

što je točan rezultat.

U sljedećem zadatku o pločama sastavljenim od šesterokuta obradit ćemo još jednu temu – popločavanje.

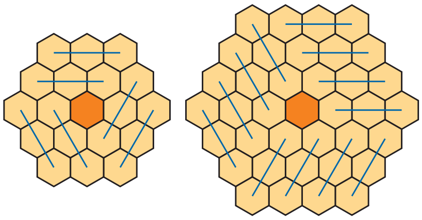
Zadatak. *Šesterokutne ploče prikazane na slici 7 pokušaj popločiti pločicama dimenzije 1×3, odnosno sastavljenim od triju šesterokuta kao na slici 9.*



Slika 9. Pločica dimenzije 1×3

Lako je uvidjeti da je takav zadatak nemoguće riješiti. To ne vrijedi samo za slučajeve sa slike 7, nego i općenito jer je broj šesterokuta na ploči sa “stranicom” duljine n ćelija jednak $1 + 3n(n-1)$ tako da jedan šesterokut uvijek ostaje nepokriven. No, učenici u osnovnoj školi mogu eksperimentirati i sami otkriti i zaključiti da je oblaganje nemoguće. Sada se nameće sljedeće pitanje za učenike: *ako iz ploče izostavimo središnju ćeliju, kako se može obložiti ostatak ploče?*

Čak i mlađi učenici mogu pronaći rješenje i pokazati ga na ploči. Primjerice ovako:

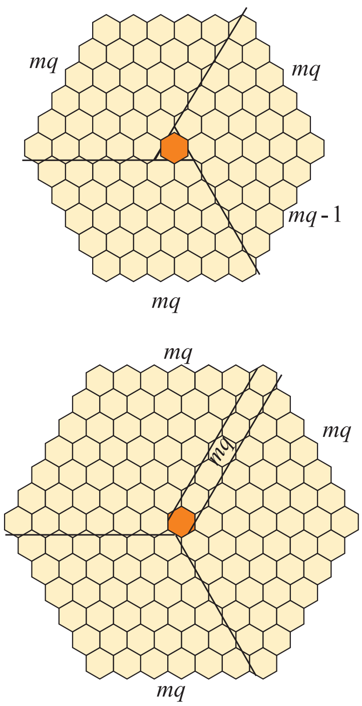


Slika 10. Popločavanje modificirane ploče

Pri razradi ove teme može se iskazati i sljedeći teorem:

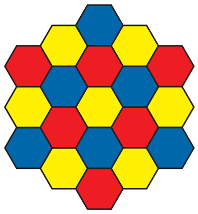
Teorem. *Nakon što joj uklonimo središnju (zatamnjenu) ćeliju, ploču sa "stranicama" duljine n šesterokuta možemo obložiti pločicama dimenzije $1 \times m$. Tada vrijedi $n = mq$ ili $n = mq + 1$; gdje su $m, n, q > 1$ prirodni brojevi.*

Na slici 11 dokaz je prikazan zorno (Ambrus, 1996.) Ćelija u sredini je zatamnjena, dakle radi se o popločavanju samo "svijetlih" ćelija. Na slici su prikazana oba tipa ploča iz iskaza teorema. Slika 10 daje primjere za $n = 3$ i $n = 4$ koji se onda mogu poopćiti. Svaka od ploča sa slike 11 podijeljena je na tri "romba". Ta podjela, primjerice, može biti takva da se svaki "red" popločí pločicama dimenzije $1 \times m$. Na desnoj ploči sa slike 11, zbog povećanja duljine "stranice" ploče za jednu ćeliju, pojavio se dodatan dio. To je pločica duljine mq koja se može popločiti osnovnom pločicom duljine m.



Slika 11. Dokaz tvrdnje

Prisjetimo se analogije sa šahovskom pločom i pokušajmo obojiti ploču sastavljenu od šesterokuta. To se može napraviti najmanje trima različitim bojama, kao što se vidi na slici 12.



Slika 12. Obojena ploča od šesterokuta

Sljedeća analogija sa šahovskom (kvadratnom) pločom može biti magični šesterokut, koji nudi razne mogućnosti za sastavljanje zadataka.

U nastavi matematike važno je koristiti zadatke na temelju realnih situacija, jer istraživanja i testovi (primjerice PISA) pokazuju da tradicionalni model nastave sa zadatcima zatvorenog tipa ne ispunjava očekivanja današnjice. Znanja stečena na takav način često nisu primjenjiva nigdje, osim na satu matematike.

Za kraj ćemo opisati prednosti korištenja zadataka koji su bliski realnim situacijama:

- matematika se pokazuje kao pomoć u boljem razumijevanju svijeta
- zadatci pomažu u učenju matematike (motivacija, učenje apstraktnog mišljenja, razumijevanje, učvršćivanje naučenog)
- jačaju pozitivan stav prema matematici
- pružaju učenicima mogućnost za samostalni, kreativni rad i priliku za razvijanje svojih sposobnosti rješavanja problema/problemskog razmišljanja.

- pri radu s takvim zadatcima može se češće uvidjeti povezanost tema u matematici s drugim predmetima
- razvijaju različite matematičke i nematematičke kompetencije, odgovarajući način mišljenja i stvaraju pravu sliku o matematici u kojoj je:
  - matematički sadržaj važniji od formalizma
  - matematičko razmišljanje u najmanju ruku jednako važno kao i ispravan rezultat
  - dobro znanje matematike ne znači "nepogrešivost" nego **dobro baratanje matematikom**
  - oboje je važno: koncipiranje misli i kritičko promišljanje istih
  - znanje matematike nije konačan proizvod nego se uvijek nadograđuje.

Pčele su tema koja se uvijek može proširivati i služi kao primjer kako se stvari i teme iz svakodnevice mogu matematički promatrati i koristiti u školskoj nastavi.

LITERATURA

1/ G. Ambrus: *A hétköznapok matematikája*, munkafüzet 4. osztályosoknak, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2010.

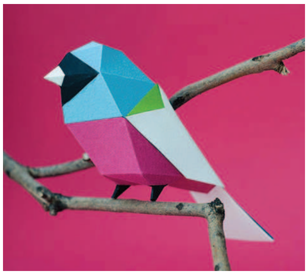
2/ G. Ambrus: *Újabb eredmények hatszögtáblán*, In: A Matematika Tanítása, 1, 14–21, Mozaik Kiadó, Szeged, 1996.

3/ G. Ambrus, A. Wagner, J. Tautz: *A méhek csodálatos élete az alsó tagozaton, (nemcsak) matematikaórákra*, In. Gyermeknevelés, (unter Erscheinen), 2014. `http://old.tok.elte.hu/gyermekneveles/index.html`

4/ Cs. Csikos, R. Kelemen, L. Verschaffel: *Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics problem solving*: a large sample Hungarian study, 43: 561–571, ZDM, Springer Verlag, 2011.

5/ J. Tautz, M. Ruppert, J. Wörler: *Die Mathematik der Honigbiene*, Erscheint in: Ruppert, M.; Wörler, J. (Hrsg.) (2013) Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. Springer: Heidelberg, Berlin, 201–216, 2013.

Životinje i geometrijske skulpture od papira



Brazilski dizajneri Caro Sivero i Juan Elizalde iz studija Guardabosques osmislili su i izrađuju skulpture životinja od papira. Geometrijska tijela dobivena na taj način omeđena su plohama sastavljenim od jednostavnih geometrijskih likova, poput trokuta i četverokuta. Iz tog su razloga takve skulpture nazvane "geometrijske životinjske skulpture od papira" (engl. *geometric paper animal sculptures*). Načinjene su od papira u boji i promišljene do detalja. Kolekcija sadrži mnoge životinje, poput tigra, lisice, medvjeda te raznih vrsta ptica. Slike pogledajte na: `http://cargocollective.com/guardabosques`