

Priče o prebrojavanju

Vesna Skočir, Zagreb



U novinama o tome možemo čitati ovako: "Znanstvenici kažu da bi ovo otkriće moglo biti važno u otkrivanju lijeka protiv raka." Novine uvijek zanima samo uporaba ideje, a ne ideja sama. Teško da itko može razumjeti važnost ideje, i to je nevjerovatno. Iznimka su pojedina djeca koja se znaju zakvačiti za ideju. Kada se dijete zakvači za ideju, imamo znanstvenika. Za djecu je prekasno da ih znanstveni duh nadahne tek na fakultetima, zato se moramo potruditi i objašnjavati ideje djeci dok su još malena.

Richard P. Feynman: Što te briga što drugi misle, Mozaik knjiga, 2010.

Špijunska posla

Mekane tenisice lijepile su se za užareni asfalt. Mario zvani Max trčao je na mjesto sastanka. Na tribinama veslačke staze nestrpljivo je čekala Tanja. Max nikada nije toliko kasnio.

— I ? Možemo li konačno otvoriti sef?

— Pa, dobro je. Samo su četiri znamenke šifre ostale nepoznate. Zadnje četiri.

— Kako misliš dobro? — Tanja zavrti glavom. — To je ukupno 10 000 kombinacija. Posao mora biti gotov za pola sata, a računaj da upis jedne šifre traje sigurno 10 sekundi.

— Pa gledaj, Marta kaže da je prvi broj paran, Toni da je prva od te četiri znamenke jednaka zadnjoj,

a Marko tvrdi da je vidio jednu sedmicu. Prema mom računu...

— A prema mom nema šanse da za pola sata "razbijemo" šifru. — prekine ga Tanja.

Max nadlakticom pređe preko orošenog čela. Čini se da je i zrak nabubrio od vlage. Tanja nije mogla sakriti zabrinutost. Izvadi iPod i počne utipkavati brojeve. Zadnji Enter i Tanja ponovno zavrti glavom. Njezina matematika nije dijelila Maxov optimizam.

Ima li Tanja razloga za zabrinutost? U čijem se računu potkrala greška?

Kada ne bismo uzeli u obzir Martinu, Tonijevu i Markovu informaciju, dakle u slučaju da su četiri posljednje znamenke šifre posve nepoznate, u najgo-

rem slučaju trebalo bi provjeriti 10 000 kombinacija. Toliko se različitih brojeva može zapisati u četiri "kućice": to su brojevi u rasponu od 0 do 9999. Dakle ukupno $1 + 9999 = 10\,000$ mogućnosti.

Do istog je rezultata moguće doći i sljedećim razmišljanjem: svaka od četiriju znamenaka, pa tako i prva, može imati deset vrijednosti: 0, 1, 2, ..., 9. Svakojoj toj vrijednosti možemo dodati vrijednost druge znamenke isto na deset načina. Stoga vrijednosti prvih dviju znamenaka možemo odabrati na $10 \cdot 10$ načina. Dakle, ukupno $10^2 = 100$ mogućnosti. Vrijednost treće znamenke isto možemo izabrati na 10 načina. Svakojoj od prethodnih mogućnosti možemo dodati vrijednost treće znamenke na deset načina. Dobijemo da tri znamenke daju ukupno $(10^2) \cdot 10 = 10^3 = 1000$ mogućnosti. Na sličan način dobijemo da četiri znamenke daju ukupno $10^4 = 10\,000$ mogućnosti.

Budući da za upis jedne šifre treba predvidjeti 10 sekundi, za sigurno bismo "razbijanje" šifre trebali predvidjeti $10\,000 \cdot 10 \text{ s} = 100\,000 \text{ s} = \frac{100\,000}{60} \text{ min} \approx 1666 \text{ min} = \frac{1666}{60} \text{ h} \approx 27 \text{ h } 46 \text{ min}$.

Dakle, nemoguće!

No dodatne informacije osjetno smanjuju broj provjera. Prva je znamenka paran broj, dakle može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. Stoga se vrijednost prve znamenke može odabrati na 5 načina. Druga ili treća znamenka, ako je Marko u pravu, sigurno je 7. Pretpostavimo najprije da je to druga znamenka. Tada nju možemo odabrati samo na jedan način. Treća znamenka u tom slučaju može biti bilo koja od deset znamenaka: 0, 1, 2, ..., 9. Znači može se izabrati na deset načina. Posljednja je znamenka jednaka prvoj, dakle ona može biti odabrana samo na jedan način. Broj je mogućnosti sada osjetno manji; jednak je $1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 = 50$. Naravno, ne smijemo zaboraviti da sedmica može biti i na trećoj poziciji. I u tom slučaju je broj šifri koje treba ispitati jednak 50 (jer je $1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 5 = 50$). Ukupan broj šifri koje treba provjeriti jednak je 100. U ovih stotinu kombinacija šifre kod kojih je sedam i na drugom i na trećem mjestu brojene su dvaput,

a takvih ima pet. Vrijeme potrebno za provjeru je dakle $95 \cdot 10 \text{ s} = 950 \text{ s} = 15 \text{ min } 50 \text{ s}$.

Tanja nema razloga za zabrinutost. Ne bude li nepredviđenih okolnosti, sadržaj sefa bit će im dostupan!

Sladoled

— *Vodim vas na sladoled. Svakome tri kuglice* – rekao je djed s vrata.

— *Ja ću čokoladu, vaniliju i lješnjak. Ili možda dvije čokolade i lješnjak ili...* – glasno je razmišljala Klara.

Za razliku od sestre Martin je odlučio da njegov sladoled bude voćni i da sve tri kuglice budu različitog okusa: borovnica, trešnja, šumska jagoda, kivi ili limun.

— *Znači za Klaru u obzir dolazi lješnjak, vanilija i čokolada u svim mogućim kombinacijama, a Martin će između pet vrsti voćnoga sladoleda odabrati tri različite kuglice.* – ponovio je djed. Klara i Martin potvrdno su kimnuli glavama.

— *Da vidimo,* – zastane djed pretvarajući se da ne primjećuje nestrpljivost svojih unuka. – *Možete li prebrojiti koliko ima različitih korneta koji zadovoljavaju vašu narudžbu.*

— *Trešnja, kivi, limun, onda jagoda, kivi i limun, pa...* – započne Martin nabrajati kornete, ali odustane, – *Teško je bez olovke i papira!*

Je li zaista tako teško? Pokušajmo bez olovke i papira odrediti koliko različitih korneta zadovoljava Klarine, a koliko Martinove želje. Zamislimo slastičara koji stavlja kuglice sladoleda u Martinov kornet. Prva kuglica može biti borovnica, trešnja, šumska jagoda, kivi ili limun; dakle može biti izabrana na pet načina. Kad je jednom izabrana prva kuglica, druga se bira između četiriju preostalih okusa. Znači dvije se kuglice mogu izabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. Ako tome pridodamo i treću kuglicu koju biramo između triju preostalih vrsta voćnoga sladoleda, izlazi da se tri kuglice mogu izabrati na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina.

No kornet u koji je slastičar najprije stavio trešnju, a potom kivi i limun, ne razlikuje se od korneta u koji je te iste kuglice stavio nekim drugim redom. Budući da se tri različite kuglice u kornet mogu staviti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina, ukupan se broj različitih korneta dobije sljedećim računom: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

U ovome primjeru broj kombinacija nije prevelik pa ih možemo i pobrojiti. To bi zasigurno učinio i Martin da su mu olovka i papir bili pri ruci.

Da bi zapis bio kraći, uvedimo oznake: B za borovnicu, T za trešnju, J za šumsku jagodu, K za kivi i L za limun. U Martinovu se kornetu mogu naći sljedeće kombinacije sladoleda:

BTJ	TJK	JKL
BTK	TJL	
BTL	TKL	
BJK		
BJL		
BKL		

Točno njih 10.

U Klarinom je slučaju situacija malo kompliciranija: između triju vrsta sladoleda treba izabrati tri kuglice, no za razliku od prije opisanoga slučaja moguće je da se u kornetu nađe i više kuglica iste vrste sladoleda. Na primjer, tri kuglice lješnjaka ili dvije kuglice čokolade, jedna vanilija i slično.

Zamislamo sad onog istog slastičara kako puni Klarin kornet. Pred njim su tri posude jedna pored druge. U prvoj je sladoled od čokolade (Č), u drugoj sladoled od vanilije (V), u trećoj od lješnjaka (LJ).

Č	V	LJ
---	---	----

Slastičareva ruka ponavlja uhodani scenarij: lagano klizi iznad posuda redom kojim su posložene, a kod nekih zastane i zagrabi kuglicu (jednu, dvije ili tri). Neka simbol za kuglicu sladoleda bude kružić



○, a znakom — prikazimo prelazak slastičareve ruke na "teritorij" nove posude. Tada izbor: dvije kuglice čokolade, jedna kuglica vanilije, možemo naznačiti na sljedeći način : ○○—○—

Na sličan način možemo naznačiti izbor:

tri vanilije	—○○○—
čokolada, vanilija, lješnjak	○—○—○
vanilija, dva lješnjaka	—○—○○

Vidimo da se svi postupci slastičara mogu prikazati s pomoću niza sastavljenog od znakova ○ i —. Ova bi spoznaja mogla biti korisna jer pobrojimo li sve nizove koji se sastoje od triju kuglica i dviju crtica, isto je kao da smo pobrojili sve kornete koji zadovoljavaju Klarinu narudžbu. Stoga zaboravimo na neko vrijeme slastičara, Klaru i sladoled. Počnimo nizati kuglice i crtice. . .

Za početak zamislimo da kuglice nisu posve iste; neka je jedna zelena, druga plava, a treća crvena, te neka je primjerice jedna crtica duža od druge. Nizove koji se sastoje od ovakvih elemenata nije teško pobrojiti: ima ih točno 120. Naime, prva u nizu može biti bilo koja od kuglica ili crtica, dakle može se izabrati na 5 načina. Druga može biti bilo koja od preostalih kuglica ili crtica pa se može izabrati na 4 načina. Dakle prva dva člana niza mogu se odrediti na $5 \cdot 4 = 20$ načina. Sličnim razmišljanjem dobijemo da se 5 elemenata može nanizati na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.

Promotrimo jednu od mogućih postava niza:

— ○ ○ — ○

Promijene li mjesta zelena i plava kuglica, dobijemo novi niz:

— ○ ○ — ○

Zamjenom kuglica moguće je dobiti još četiri nova niza:

— ○ ○ — ○
 — ○ ○ — ○
 — ○ ○ — ○
 — ○ ○ — ○

Ukupan je broj nizova koje takvim zamjenama možemo dobiti jednak $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Naime, kuglicu koja se nalazi iza veće crtice možemo odabrati na tri načina, onu koja se nalazi nakon nje na dva, a posljednju na jedan način.

No ako bi kojim slučajem kiša isprala boju s kuglica tada ih više ne bismo mogli razlikovati. Svi bi se oni

“stopili” u jedan niz: — ○ ○ — ○. Možemo zaključiti da će se ukupan broj od 120 nizova umanjiti 6 puta ako šarene kuglice zamijenimo jednobojnima. Dakle bit će jednak $\frac{120}{6} = 20$.

Slično, skratimo li primjerice veću crticu tako da obje budu iste duljine, ukupan će broj nizova biti 2 puta manji i bit će jednak $\frac{20}{2} = 10$.

Dakle ukupan se broj različitih nizova koje je moguće sastaviti od triju jednakih kuglica i dviju jednakih crtica računa na sljedeći način:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

Tim je računom dobiven broj svih korneta koji zadovoljavaju Klarinu narudžbu¹. Budući da ih nema tako puno, možemo ih i pobrojiti:

ČVLJ	ČČV	ČČLJ	ČČČ
VLJ	VVČ	VV	
LJLV	LJLJČ	LJLJLJ	

Zaista, točno 10.

¹ Najprije smo riješili problem prebrojavanja u kojem smo vodili računa o boji kuglica i duljini crtica. Naizgled kompliciraniji problem od polaznoga, ali samo naizgled, jer njega znamo riješiti. Razmatranje ovakvog općenitijeg problema pokazalo se korisnim budući da smo pomoću njega, postepenim uvođenjem ograničenja (kuglice gube boju, crtice izjednačuju duljinu) došli do traženog odgovora.

MATEMATIKA

naša svagdašnja

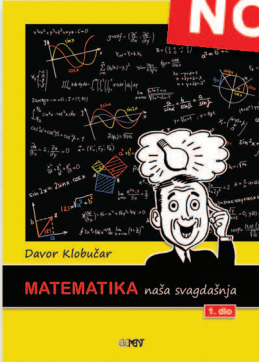
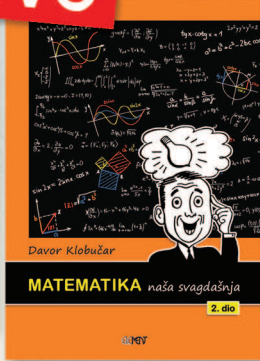
1. dio i 2. dio

Drugo dopunjeno izdanje zanimljivog spoja popularne i ozbiljne matematike!

U njoj ćete osim ozbiljnih tema naći i šaljive primjedbe, birane zadatke, dodatna pitanja za poticanje znatiželje, rijetko spominjane detalje, a povremeno i priče.

Nova knjiga ima tristotinjak stranica više od prve pa nam nije bilo druge nego je razdijeliti **u dva sveska**.

NOVO

www.element.hr