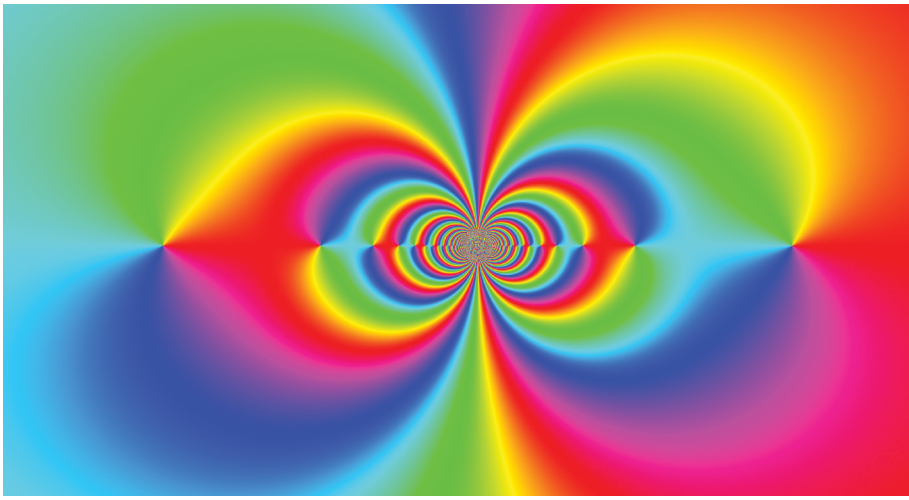
Grafički prikaz funkcija kompleksne varijable

Neven Elezović, Zagreb



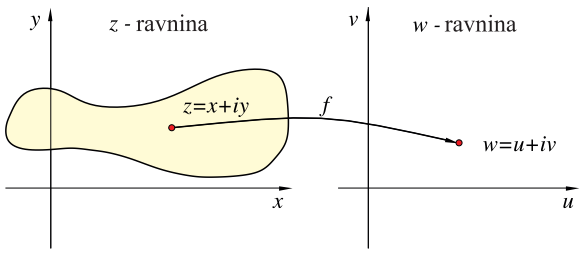
Kompleksne brojeve susrećemo dvaput tijekom srednjoškolskog obrazovanja. Danas je moderno za svaku temu koja se obrađuje naći trenutnu primjenu. Ona bi, valjda, trebala dokazati da ima smisla proučavati te pojmove. Stoga s motivacijom za proučavanje kompleksnih brojeva imamo popriličnih poteškoća. Uistinu, za njih nije lako na elementarnom nivou naći smislenu primjenu (ipak, vidi [1]). Učenici u nekim strukovnim školama susrest će se s tim brojevima pri opisu nekih elektrotehničkih pojava, no gimnazijalci o tome neće ništa čuti.

Obično se motivacija i primjena pronađu u rješavanju kvadratnih jednadžbi — to je gradivo koje neposredno slijedi nakon prvog upoznavanja s kompleksnim brojevima. Pritom će neki nastavnik kazati da su se kompleksni brojevi prvi put pojavili upravo iz potrebe da se riješi takva jednadžba, recimo oblika $x^2 - 2x + 2 = 0$. Njezina su rješenja $x_1 = 1 + i$ i $x_2 = 1 - i$. No, ta je interpretacija pogrešna. Rješavanje kvadratnih jednadžbi nije bio razlog uvođenju kompleksnih brojeva. Jednadžba $x^2 + 2x + 2 = 0$ nema realnih rješenja baš kao što ni jednadžba $\sin x = 2$ nema realnih rješenja. Obje, naravno, imaju rješenje u skupu kompleksnih brojeva, ali bez dobrog razloga nitko ih tamo neće početi tražiti.

Dobar je razlog bila *jednadžba trećeg stupnja*. Svaka jednadžba trećeg stupnja ima barem jedno realno rješenje. U potrazi za eksplicitnom formulom za takvo rješenje pojavio se vrlo zanimljiv slučaj. Formule koje je otkrio Niccolò Tartaglia, a zapisao Gerolamo Cardano, davale su jednostavno realno rješenje u slučaju kad jednadžba ima samo jedno realno rješenje. Ali, ako je polinom trećeg stupnja takav da ima tri realne nul-točke, onda se u Cardanovim formulama pojavljuje drugi korijen negativnog broja. Izračunamo li taj korijen onako kako danas znamo raditi, na koncu će se imaginarni dijelovi kratiti i dobit ćemo tri realna rješenja. To je famozni *casus irreducibilis* slučaj, kad se do realnih rješenja dolazi uporabom kompleksnih brojeva.

Priča o kompleksnim brojevima ne završava samo na brojevima. Preslikavanja među kompleksnim ravninama igraju i ovdje glavnu ulogu. U ovom članku ćemo govoriti o funkcijama kompleksne varijable, posebno o načinima na koji se one mogu grafički predočiti. Razumijevanje ljepote tih slika, od kojih su neke dane i u Panoptikumu ovog broja MiŠ-a, opravdat će čitanje ovog članka.

Neka je G podskup kompleksne ravnine $\mathbf{C}$. Preslikavanje $f : G \to \mathbf{C}$ nazivamo *funkcijom kompleksne varijable*. Ono kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružuje kompleksni broj $w = f(z)$.



Prikažimo broj $w = f(z)$ u algebarskom obliku: $w = u + iv$. Onda su u i v realne funkcije dviju realnih varijabli x i y. Zadati funkciju kompleksne varijable isto je što i zadati te dvije funkcije. u se naziva realni, a v imaginarni dio od f.

Na primjer, ako je $w = f(z) = z^2$ onda imamo

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

pa je

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Zor je u matematici izuzetno važan. Od svih načina prikazivanja funkcije, njezin graf odaje nam najviše trenutnih informacija. Želimo li postupiti kao u realnom slučaju i predočiti kompleksnu funkciju f njezinim grafom, naići ćemo na problem. Područje definicije i područje vrijednosti imaju dvije dimenzije. Za grafički prikaz morali bismo imati zor u četverodimenzionalnom prostoru, što nam nije moguće.

Umjesto toga, djelovanje funkcije prikazujemo na neke druge načine. Opisat ćemo i slikama prikazati neke od tih načina.

Prva je mogućnost da na odvojenim slikama skiciramo u što funkcija f preslikava zadanu točku, krivulju ili podskup kompleksne ravnine. Pritom na prvoj slici skiciramo točke iz područja definicije funkcije f, pa tu ravninu nazivamo z-ravnina. Na drugoj slici skiciramo točke iz područja vrijednosti funkcije, pa tu ravninu nazivamo w-ravnina. Iako je u oba slučaja riječ o istoj kompleksnoj ravnini, kažemo (pomalo neprecizno) da f preslikava točke kompleksne z-ravnine (s osima x i y) u točke kompleksne w-ravnine (s osima u i v).

Ponekad ćemo u i v lakše odrediti ako je z prikazan u trigonometrijskom obliku, s pomoću realnih varijabli: modula r i argumenta φ:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Već u srednjoj školi se za ovaj izraz rabi zapis

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

uglavnom kao simbolički zapis. Malo kasnije, vidjet ćemo da je ovdje skrivena prava eksponencijalna funkcija. Ovaj se simbol potencira na uobičajeni način, jer vrijedi de Moivreova formula

$$\begin{aligned}\left(e^{i\varphi}\right)^n &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ &= \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.\end{aligned}$$

Također, i w možemo pisati u trigonometrijskom obliku. Tako za potenciju $w = f(z) = z^n$ vrijedi

$$w = [re^{i\varphi}]^n = r^n e^{in\varphi}.$$

pa je modul od w jednak r^n, a argument je $n\varphi$.

Područja kompleksne ravnine omeđena su krivuljama. Zato se prvi uvid u djelovanje funkcije kompleksne varijable dobiva proučavanjem što ta funkcija radi s određenim krivuljama u z-ravnini.

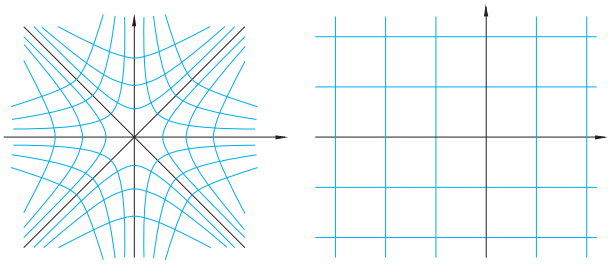
Ako je moguće, za skupove krivulja u jednoj ravnini dobro je odabrati koordinatne krivulje, one duž kojih su pojedine koordinate konstantne.

Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1. Duž kojih je krivulja realni dio funkcije $w = z^2$ konstantan? Duž kojih je konstantan imaginarni dio? Skicirajmo te krivulje u z-ravnini.

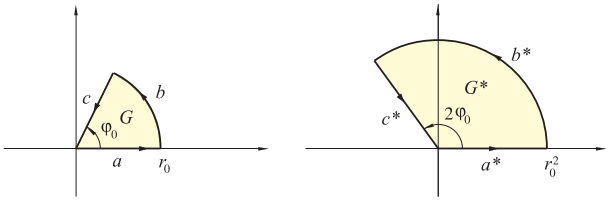
Realni i imaginarni dijelovi funkcije $f(z) = z^2$ su: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Te su funkcije konstantne ako vrijedi $x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$. Ove jednadžbe predstavljaju dvije familije hiperbola.

Primijetimo da se te hiperbole sijeku pod pravim kutom. Naime, njihova je slika preko funkcije $w = z^2$ Kartezijeva ortogonalna mreža $u = C_1$, $v = C_2$ u w-ravnini. Ovdje je riječ o svojstvu funkcija kompleksne varijable da čuvaju kutove pod kojim se sijeku dvije krivulje (u svakoj točki u kojima je njihova derivacija različita od nule).



Sa slike uočavamo da je ishodište $z = 0$ posebna točka za preslikavanje $f(z) = z^2$. Uistinu, to je nul-točka funkcije i nul-točka njezine derivacije. Sa ovakvih slika ćemo uvijek uočiti neke istaknute točke preslikavanja f, posebno one u kojima funkcija nije definirana ili koje su nul-točke funkcije ili njezine derivacije.

Ako u funkciji $f(z) = z^2$ prikažemo z u trigonometrijskom obliku, $z = r \cdot e^{i\varphi}$, onda je $w = z^2 = r^2 \cdot e^{2i\varphi}$. To znači da ova funkcija preslikava svaku točku u točku koja ima dvostruko veći argument, a modul joj je jednak kvadratu modula točke koju preslikavamo. Zato se kružni isječak sa središtem u ishodištu preslikava u kružni isječak dvostruko većeg središnjeg kuta, što pokazuje sljedeća slika:



Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable definira se za bilo koji kompleksni broj $z = x + iy$ formulom

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \qquad (1)$$

Eksponencijalna funkcija je karakterizirana svojim temeljnim svojstvom, to je neprekinuta funkcija za koju vrijedi

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2) \qquad (2)$$

za sve njezine argumente z_1 i z_2. Funkcija definirana s (1) ima to svojstvo:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right] \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)\times \\ &\quad \times(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

Ako je z realan, ($z = x$ i $y = 0$), onda je $\cos y + i \sin y = 1$ pa je $e^z = e^x$. Dakle, kompleksna eksponencijalna funkcija podudara se na skupu realnih brojeva s realnom eksponencijalnom funkcijom. Ako je pak $x = 0$, onda vrijedi

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = 1$$

pa vrijednosti eksponencijalne funkcije "kruže" po jediničnoj kružnici. Nadalje, za svaki cijeli broj k vrijedi

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^z \cdot e^{2k\pi i} \\ &= e^z[\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)] \\ &= e^z \end{aligned}$$

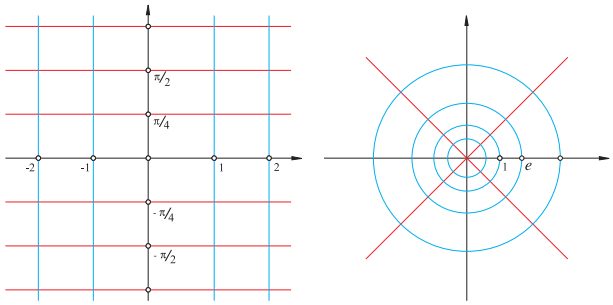
pa je eksponencijalna funkcija *periodička* s periodom $2\pi i$.

Primjer 2. U što se preslikava Kartezijeva koordinatna mreža iz z-ravnine funkcijom $w = e^z$?

Koordinatnu mrežu čine krivulje duž kojih su pojedine koordinate konstantne: $x = C_1$ i $y = C_2$ opisuju Kartezijevu koordinatnu mrežu u z-ravnini.

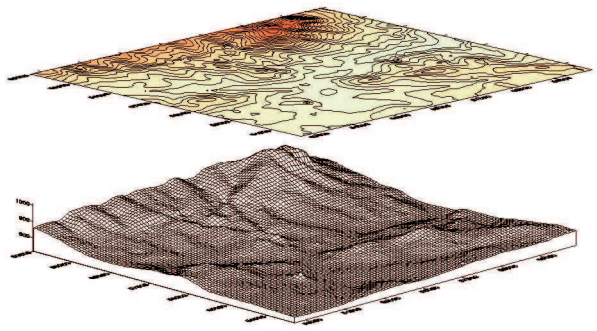
$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Zato se pravci $x = C_1$ preslikavaju u kružnice $w = e^{C_1} \cdot e^{iy}$ (s polumjerom e^{C_1}), a pravci $y = C_2$ u zrake $w = e^x \cdot e^{iC_2}$. Primijeti da su obje familije krivulja međusobno ortogonalne. Eksponencijalna funkcija preslikava Kartezijevu koordinatnu mrežu iz z-ravnine u polarnu koordinatnu mrežu u w-ravnini.



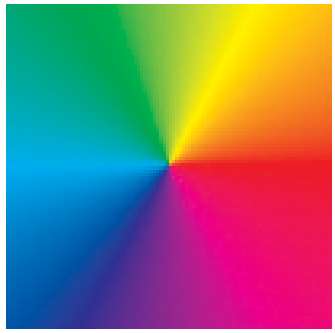
Novi načini grafičkog predočavanja funkcija kompleksne varijable

U novije vrijeme uporabom moderne tehnologije dobili smo mogućnost još jedne vrste zornog prikaza funkcija kompleksne varijable. Ideja je poopćenje tehnike koja se od davnina koristi u kartografiji, u kojoj izohipse dočaravaju visinu određene plohe: sve točke na istoj izohipsi imaju istu visinu. U kartografiji se taj dojam grafički pojačava i bojom, pa su točke iste visine obojene istom bojom. Tamo gdje se boje brže mijenjaju, izohipse su bliske jedna drugoj, što znači da se visina na terenu brže mijenja.



Pri predočavanju funkcija kompleksne varijable služit ćemo se sličnom tehnikom: izohipse će nam označavati *modul* vrijednosti w, a argument ćemo dočaravati izborom boje iz dugina spektra. To praktički znači da će u w-ravnini biti nacrtana *polarna mreža*, koja se sastoji od koncentričnih kružnica — one sadržavaju točke istog modula, i zraka iz ishodišta — na njima su sve točke s istim argumentom.

Na sljedećoj slici prikazana je paleta boja koju ćemo koristiti u nastavku.



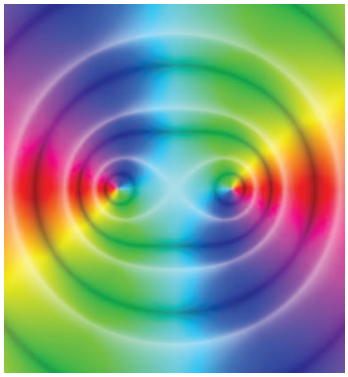
Umjesto kompletne polarne mreže, izohipse se mogu naznačiti i promjenom intenziteta boje, kao na sljedećoj slici. Na njoj je prikazan "graf" funkcija $f(z) = z$, ona će, naravno, ostaviti ovako obojenu ravninu nepromijenjenom.

Za prikazivanje grafa bilo koje funkcije $w = f(z)$, koristi se onda sljedeća tehnika: izračuna se vrijednost w i onda se točka z u z-ravnini oboji onom bojom koja je određena njezinom slikom w u w-ravnini obojenoj na upravo opisan način.

Pogledajmo kako taj princip funkcionira na nekoliko primjera jednostavnijih krivulja. Ove su slike preuzete s *web*-stranice [2] na kojoj se može pronaći program koji ih generira.

Sljedeća slika prikazuje djelovanje funkcije

$$f(z) = z^2 - 1.$$



Sa slike se jasno uočavaju nul-točke ove funkcije. Također, krivulje nalik elipsama su izohipse, one točke za koje je $|z^2 - 1| = r$, konstanta. Naravno, nije riječ o elipsma, što se jasno vidi za male vrijednosti od r. U jednom trenutku ta krivulja nalikuje na lijepo napisani znak ∞, a onda se razbija u dva dijela, svaki oko jedne nul-točke. Te se krivulje nazivaju Cassinijevi ovali.

Pogledamo li boje na ovoj slici, vidimo da se svaka od njih javlja u dva područja. Tako na primjer, crvenu boju koja se u w-ravnini nalazi oko pozitivne realne osi i označava pozitivne realne brojeve (kojima je argument jednak nuli) nalazimo ovdje oko pozitivne, ali i oko negativne osi, jer će se oba ta skupa preslikavati u pozitivne realne brojeve. Preciznije, riječ je o segmentima $[1, \infty\rangle$ i $\langle -\infty, -1]$ koji su obojeni crvenom bojom. Kompletna imaginarna os obojena je u cijan, jer su kvadrati tih brojeva negativni, a negativna realna os ima u w-ravnini cijan boju.

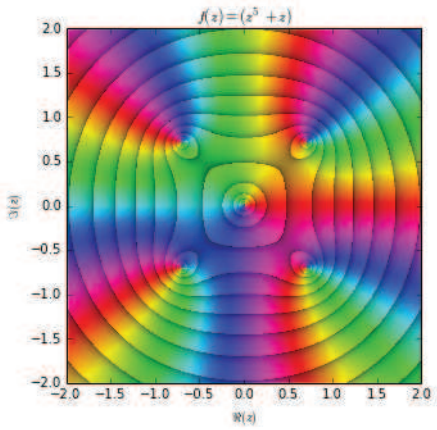
Sljedeća slika prikazuje funkciju

$$f(z) = z^3 - 1,$$

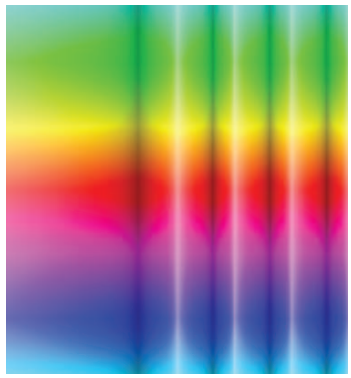
gdje se sad lako uočavaju slični efekti.

Još jedna slika polinoma petog stupnja

$$f(z) = z^5 - z.$$

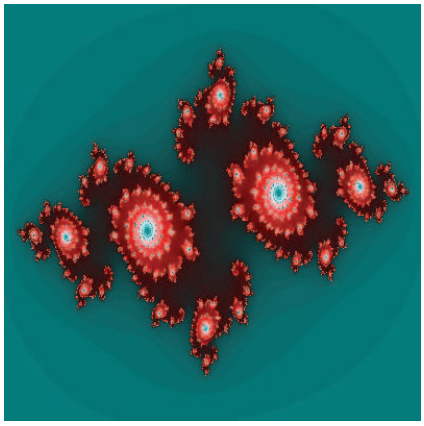


Primijenimo li sad istu tehniku za prikaz eksponencijalne funkcije, dobit ćemo ovakvu sliku.



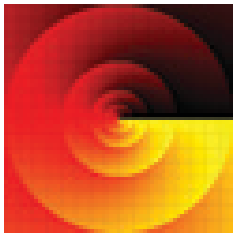
Ona je možda razočaravajuća, no eksponencijalna je funkcija po mnogočemu posebna i jednostavna. Sa slike jasno vidimo da sve slike točaka s jednakom realnom vrijednošću x imaju isti modul, jer je $|e^z| = e^x$. Također vidimo da sve slike točaka s istom imaginarnom vrijednošću imaju isti argument, jer je $\arg(e^z) = y$. Kad bi slika pokrivala veće područje, vidjeli bismo jasno i periodičnost eksponencijalne funkcije, jer bi se boje horizontalnih pruga ponavljale.

Ako je ova slika prejednostavna, pogledajmo onda sljedeću.

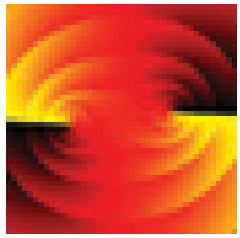


Zaljubljenici u fraktale prepoznat će ovdje Julijin skup. Kakve veze on ima s funkcijama kompleksne ravnine?

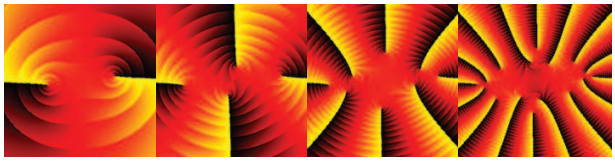
Objašnjenje se može naći na stranici [3]. U prikazu kompleksnih funkcija autor tu koristi istu tehniku, ali prilagođenu paletu boja koja izgleda ovako:



Zatim se crta graf funkcije $f(z) = z^2 + c$, uz izbor $c = -0.75 - 0.2i$. Taj će graf nalikovati onom za funkciju $f(z) = z^2 - 1$, nul-točke i položaj osi je malo promijenjen (i boje, naravno, radi izbora druge palete).

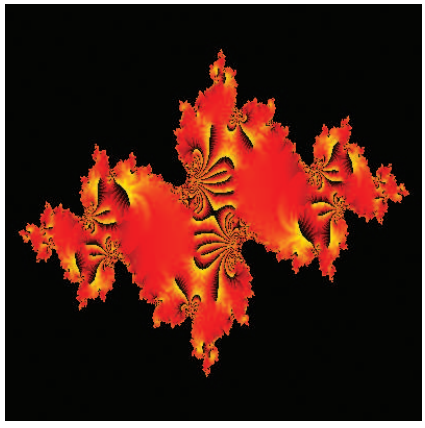


U nastavku se promatraju *iteracije* ove funkcije: $f^{(2)}(z) = f(f(z))$, $f^{(3)}(z) = f(f^{(2)}(z))$, itd. Onda je $f^{(n)}(z)$ polinom stupnja 2^n i imat će 2^n kompleksnih nul-točaka. Na slici su prikazane prve četiri iteracije:



Ukažite gdje se nalaze nul-točke ovih polinoma i uvjerite se da su sve na broju.

Nakon dvadeset iteracija, polinom $f^{(20)}(z)$ imat će $2^{20} = 1\,048\,576$ nul-točaka, a njegova slika bit će ovakva:



Nemojte ih pokušati prebrojiti. Crnom bojom obojene su točke koje su po modulu toliko velike da se više ne mogu računati na računalu. Nastavimo li proces dalje i upitamo li se za koje će kompleksne brojeve z postojati limes $f^{(n)}(z)$ kad n teži u

beskonačnost, odgovor će glasiti: za točke s ruba Julijina skupa.

Algoritam za crtanje ovih grafova je vrlo jednostavan i odgovarajuće programe može načiniti svaki iole talentirani programer (srednjoškolci su uključeni). Uz pomoć takvih alata mogu se jasno vidjeti neka svojstva funkcija kompleksne varijable koje je bilo nemoguće zorno prikazati s pomoću drugih tehnika. Dobar primjer za to je sljedeći teorem koji je 1914. g. dokazao R. Jentzch:

Ako red potencija $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ *konvergira na krugu polumjera* R*, tada se nul-točke njegove parcijalne sume gomilaju oko svake točke na kružnici* $|z| = R$.

Na primjer, za geometrijski red

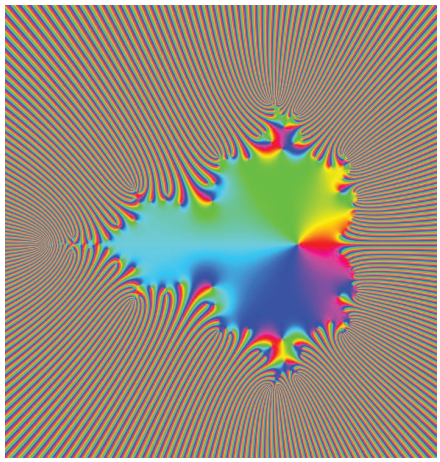
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

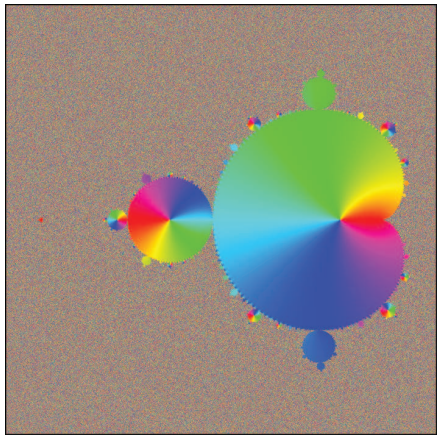
znamo da konvergira na krugu $|z| < 1$. Konačna suma tog reda je polinom

$$P_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n.$$

Na sljedećoj je slici nacrtan graf polinoma P_{60}, na kojoj jasno uočavamo nul-točke tog polinoma. Istaknuti su samo argumenti, a moduli nisu naznačeni. Takva se slika naziva *fazni portret*. Kako znamo da je riječ o polinomu P_{60}?

Sada ćemo moći razumjeti sliku polinoma koji generira Mandelbrotov skup, najprije deveta iteracija, a zatim i dvjestota iteracija:





Na naslovnici i u panoptikumu ovog broja MiŠ-a nacrtani su grafovi različitih funkcija kompleksne varijable. Detalji i još neki primjeri mogu se naći na stranici [4]. Isplati se posjetiti tu stranicu i uživati u kompleksnim ljepotama. Na internetu je dostupan i članak [5] s bogatim popisom referenci za ovo područje.

LITERATURA

1/ Neven Elezović, *Kompleksni brojevi*, MMB 8, Element, 2000.

2/ `http://www.codeproject.com/Articles/80641/`

3/ `http://www.mai.liu.se/~halun/complex/`

4/ `http://www.visual.wegert.com/`

5/ Alias Wegert and Gunter Semmler, *Phase Plots of Complex Functions: A Journey in Illustration*, Notices of the AMS, Vol. 58, No. 6 (2011.), 768–780.