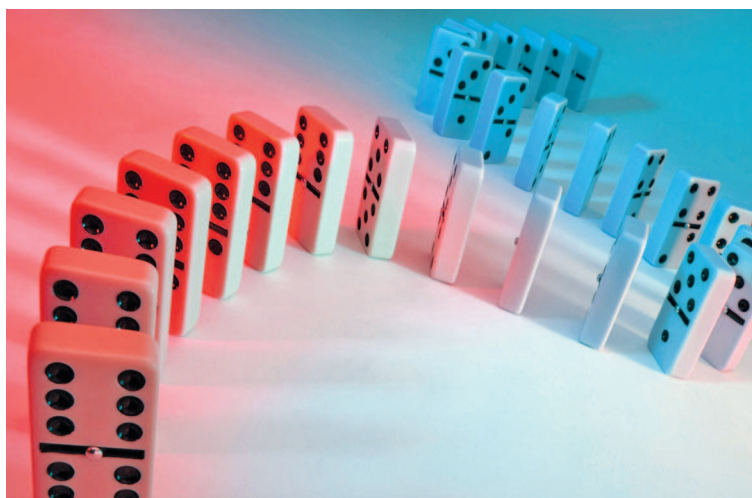


Otkrivamo princip matematičke indukcije

Šime Šuljić, Pazin

Princip matematičke indukcije krupan je zalogaj u srednjoškolskoj nastavi matematike. Po programu dolazi na početku četvrtog razreda gimnazije i tehničkih škola. Možda se kao nastavnici sjećate kako ste prihvatili dokaz matematičkom indukcijom u srednjoj školi, ali vjerujem da ćete se složiti da vam je potpuno *sjeo* tek kada ste na fakultetu učili teoriju brojeva.



Talijanski matematičar *Giuseppe Peano* (1858. – 1932.) uveo je princip matematičke indukcije u aksiomatsku izgradnju realnih brojeva. Samu tehniku dokazivanja prvi je formulirao talijanski matematičar i astronom *Francesco Maurolico* (1494. – 1575.). Svjesno ili nesvjesno i mi često slijedimo povijesno didaktičko načelo, pa učenicima koji se spremaju za matematička natjecanja već u prvom razredu srednje škole otkrijemo tehniku dokazivanja, a onda u četvrtom razredu tražimo sustavan pristup. Unatoč našem nastojanju mnogim će učenicima biti teška ova nastavna jedinica. To se vidi kroz formalne i neformalne pogreške koje učenici rade u testovima, a koje upućuju na nerazumijevanje smisla metode. Namjera ovog članka nije postaviti strogo teorijski pristup matematičkoj indukciji. Čak ne bih ni izricao Peanov aksiom na kojem se zasniva matematička indukcija. Cilj mi je donekle opisati probleme s kojima se susrećemo i prenijeti neke pokušaje približavanja metode učenicima.

Ali ruku na srce, matematička indukcija jest teško poglavlje. Zbog toga posežemo za analogijama s domino pločicama ili stajanjem ljudi u redu. Fasci-

nantno je gledati kako se pun stol domino pločica ruši, jedna po jedna, ali što nama ulijeva sigurnost da će i posljednja biti srušena? To što je prva porušila drugu, pedeseta pedeset i prvu, znači li da će i zadnja pasti? Nama je potrebna garancija da je onaj koji ih je poslagao dobro pazio da razmak između bilo koje dvije susjedne pločice bude manji od visine pločice. I to ne samo između prve i druge, n -te i one iza nje! Primjer ljudi koji stoje u redu i kupuju kartu ili jedan drugom nešto prenose isto nisu uvjerljivi. Ako je prvi prenio drugom, n -ti svom slijedbeniku to još uvijek ne znači da lanac nije netko od preostalih članova prekinuo. A u konačnici ti su nizovi konačni, a naši se matematički zadatci odnose na beskonačan niz brojeva.

Kada učenik prihvati ideju, susreće se sa zadacima o algebarskim strukturama ili geometrijskim činjenicama koje su same po sebi složene, a usput povezuju gradivo svih prethodnih razreda. I to je nova otežavajuća okolnost. Često nije lako ni transformirati dobiveni izraz koraka indukcije tako da bude očito da je riječ o onom istom izrazu kakav je

dan u pretpostavci indukcije, ali koji, eto, vrijedi i za $n + 1$. U razredu u tom smislu ulažemo ogromni napor da otkrijemo uzorak koji vrijedi za prirodan broj n i za njegov sljedbenik $n + 1$. U tome jest draž i ljepota matematike, koju u posljednje vrijeme sve češće definiraju kao znanost o uzorcima. Nažalost, ispravljajući testove shvatimo da su neki učenici očito bili na instrukcijama na kojima se ni najmanje nije marilo za uzorke i njihovu ljepotu. Izmnožiti i proširiti rezultat koraka indukcije, te ga ostaviti u najnezgrapnijem obliku, a onda uzorak koji bi zapravo kao cilj postupka trebalo dobiti također svesti na isti nezgrapni oblik. Tako je lakše, jer su algebarske strukture i faktORIZACIJA svojevrmeno također usvojene po istom načelu.

Zadatci matematičke indukcije imaju objektivno još jednu nezahvalnu stranu. A što ako ne uspijemo dokazati? Moguća su dva uzroka, ili zadatak ne uspijevamo riješiti ili tvrdnja ne vrijedi. Nakon prve domaće zadaće učenici su me dočekali s takvim zadatkom:

Zadatak. *Dokažite da je izraz $5^n - 2^3$ djeljiv s 3 za svaki prirodni broj n .*

Čudno mi je bilo da baš nitko nije uspio riješiti zadatak, a kako je riječ o novim udžbenicima, posumnjao sam na tiskarsku grešku. Pa da, već za $n = 2$ dobivamo 17 koji nije djeljiv s 3. Ali kako je onda trebao glasiti zadatak? Tu su učenici imali mašte i više prijedloga u čije provjere se moglo utrošiti mnogo vremena. Prvu ideju smo odmah propustili kroz *GeoGebra* tablični kalkulator. U prvi smo stupac unijeli niz prirodnih brojeva, u drugi smo unijeli zadani izraz koristeći čelije prvog stupca kao eksponente: $5^{A2} - 2^{A2}$ i relativnim kopiranjem popunili stupac. U trećem stupcu koristili smo *GeoGebra* naredbu **OstatakDijeljenja[B2,3]**. Ako je djeljivo, rezultat bi morao biti 0. Tako je i bilo do $n = 22$. Tu je program izbacio simbol upitnika, ali zbrajanjem znamenaka lako bismo mogli ustanoviti je li ili nije djeljiv s 3. Ali očito ni sam taj broj nije točan, jer je potencija broja 5 uvijek neparan broj, a potencija broja dva uvijek paran broj. Razlika neparnog i parnog broja je neparan broj. Očito je računalu zaglibilo u računanju

s velikim brojevima, pa moramo posegnuti za metodom koju upravo učimo. Zadatak je sada lagan, a motiv snažan: biti moćniji od računala!

A	B	C
n	$5^n - 2^n$	Ostatak dijelj. s 3
1	3	0
2	21	0
3	117	0
4	609	0
5	3093	0
6	15561	0
7	77997	0
8	390369	0
9	1952613	0
10	9764601	0
11	48826077	0
12	244136529	0
13	1220694933	0
14	6103499241	0
15	30517545357	0
16	152587825089	0
17	762939322053	0
18	3814697003481	0
19	19073485803837	0
20	95367430592049	0
21	476837156105973	0
22	2384185786821321	0
23	11920928946689516	?
24	59604644758613408	?

Napomena. Kada neki od programa zapne u računanju, uvijek je na raspolaganju moćni internetski servis www.wolframalpha.com koji će velike potencije izračunati bez problema. U našem slučaju u 23. retku pogreška je u zadnjoj znamenici. Umjesto 6 točno je 7.

Većina udžbenika temu matematička indukcija započinje *Eulerovom* tvrdnjom koja u kombinaciji s nepotpunom indukcijom može navesti na pogrešan zaključak:

Je li izraz $P(n) = n^2 + n + 41$ prost broj za sve prirodne brojeve n ?

Bistri učenici mogu biti nezgodni i učas pobiti naše nastojanje da pokažemo da se tu nižu i nižu prosti

brojevi. Lako je uočljivo da se za broj 41 u izrazu može izlučiti zajednički faktor. Niz *puca* već na 40 ali tu je potrebno malo raspisivanja i izlučivanja, odnosno ne bode oči.

Uvrštavati redom jednoznamenaste brojeve i nije neki problem za računati napamet. I tako treba prionuti tom poslu! No duh vremena je takav da učenici odustaju nakon nekoliko izračuna. Radije bi kalkulatorom. Model *Casio* serije *ES* je vrlo zahvalan za to. Potrebno ga je prebaciti u *TABLE* način rada i možete odmah dobiti cijelu tablicu vrijednosti. Ne smije se pretjerivati s prevelikim nizom koraka zbog ograničene memorije.

Imate li na raspolaganju projektor i računalo, *GeoGebra* je idealna da u par minuta kroz tablicu provjerite tvrdnju. Kao u prethodnom primjeru, formirate prvi i drugi stupac. *GeoGebra* ima naredbu **JeLiProstBroj [<broj>]** koji daje vrijednosti *true* ili *false*, odnosno istina ili laž. Ovdje je dodan i četvrti stupac koji prikazuje proste faktore, a u prvih 39 redaka uvijek je po jedan.

Tablica - Eulerova tvrdnja.ggb

Logička vrijednost C11: JeLiProst(B11)

	A	B	C	D
1	n	$P(n) = n^2 + n + 41$	JeLiProst[broj]	ProstiFaktori[broj]
2	1	43	true	{43}
3	2	47	true	{47}
4	3	53	true	{53}
5	4	61	true	{61}
6	5	71	true	{71}
7	6	83	true	{83}
8	7	97	true	{97}
9	8	113	true	{113}
10	9	131	true	{131}
11	10	151	true	{151}
12	11	173	true	{173}
13	12	197	true	{197}
14	13	223	true	{223}
15	14	251	true	{251}

Nisu u krivu oni koji kažu da uz računalo manje mislimo. Ovdje nam je to pomalo i potrebno da otklonimo pozornost od otkrivanja gdje Eulerova tvrdnja puca. Ipak računala su svuda oko nas, svakodnevno se njima služimo. Odavna se već u matematici koriste za rješavanje problema, ali i otvaranje novih matematičkih problema. U prethodnom primjeru

otkrili smo da treba biti oprezan s računalom kada su u pitanju veliki (ali i mali) brojevi. Programski su jezici ograničeni i u takvim se slučajevima računala posebno programiraju. Ovo je prilika da se spomene kako postoji numerička matematika koja se bavi tim problemima. Snaga računala bazira se na matematici.

