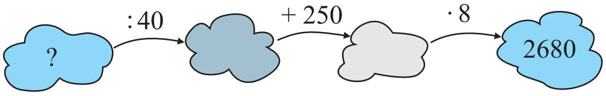
Metoda rješavanja unatrag

Sanja Varošanec, Zagreb

Iako je Descartesova ili algebarska metoda obično prvi izbor metode pri rješavanju tekstualnih zadataka, korisno je poznavati i druge, posebne metode koje učeniku omogućavaju da uspješno rješava tekstualne zadatke puno prije nego što u 6. razredu ovlada radom s algebarskim jednadžbama. Ovdje ćemo prikazati jednu od takvih posebnih metoda: **metodu rješavanja unatrag**. Bit joj je iskazana u njezinom imenu: zadatak počinjemo rješavati krećući od posljednjeg danog podatka prema prvom koraku koji je dan u zadatku. Opisat ćemo tri tipa zadataka koji su pogodni za upotrebu ove metode i komentirat ćemo načine sastavljanja sličnih problema.

1. tip: Oblačići. *Ako neki broj podijelimo sa* 40 *pa dobivenom količniku pribrojimo* 250 *i dobiveni zbroj pomnožimo sa* 8 *dobit ćemo broj* 2680*. Koji je početni nepoznati broj?*



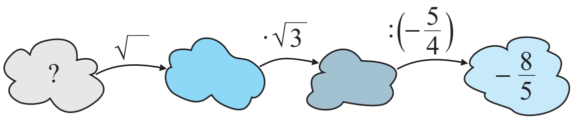
Slika 1.

Zadatak rješavamo polazeći od posljednjeg podatka, tj. da je broj 2680 dobiven množenjem 8 i prethodno dobivenog zbroja. Zaključujemo da je taj nepoznati zbroj jednak $2680 : 8 = 335$. Prema rečenom u zadatku, taj je zbroj dobiven pribrajanjem broja 250 nepoznatom količniku. Dakle, nepoznati količnik jednak je $335 - 250 = 85$. I konačno, ovaj je količnik dobiven dijeljenjem početnog broja sa 40, pa je početni nepoznati broj jednak $85 \cdot 40 = 3400$.

Rješavanje ovakvog zadatka dobro je popratiti sličicom: nizom oblačića spojenih linijama na kojima su upisane operacije koje se izvode. Cilj je popuniti niz oblačića krećući se od posljednjeg do početnog oblačića. Niz oblačića ovog zadatka prikazan je na slici 1.

Ponekad zadatak uopće nije zadan tekstom, nego se zadaje ovakav niz oblačića uz pitanje: Koji se broj nalazi na mjestu upitnika? Prethodni je zadatak bio primjeren učenicima 5. razreda koji poznaju operacije u skupu prirodnih brojeva. Ovisno o tome koji skup brojeva učenik poznaje ovaj se zadatak lako prilagođava. Evo primjera jednog zadatka primjerenog učenicima 8. razreda za uvježbavanje operacija u skupu realnih brojeva.

Koji se broj nalazi na mjestu upitnika?



Slika 2.

2. tip: Premještanja. 126 *učenika osmih razreda krenulo je s tri autobusa na izlet. Na prvom stajalištu iz trećeg autobusa prijeđe u drugi* 8 *učenika. Na drugom stajalištu iz drugog autobusa u prvi prijeđe* 4. *I konačno na trećem stajalištu iz prvog autobusa u treći prijeđe* 6 *učenika. Kad su nastavili vožnju u svakom je autobusu bio jednak broj učenika. Koliko je učenika bilo u svakom autobusu na početku putovanja?*

Budući da je na kraju bio jednak broj učenika u svakom autobusu, to znači da ih je u svakom bilo $126 : 3 = 42$. Na trećem je stajalištu iz prvog prešlo u treći 6 učenika, tj. prije njihovog prelaska u prvom je autobusu bilo 6 učenika više, tj. 48, a u trećem 6 učenika manje, tj. 36. Na drugom je stajalištu iz drugog prešlo u prvi autobus njih 4, a to znači da je prije tog prelaska u drugome bilo 4 učenika više, njih 46, a u prvom 4 učenika manje, tj. njih 44. Na prvom stajalištu je iz trećeg u drugi prešlo 8 učenika, tj. prije ovog prelaska u trećem je autobusu bilo 8 učenika više, njih $36 + 8 = 44$, a u drugome 8 manje, tj. bilo ih je $46 - 8 = 38$. Dakle, na početku putovanja je broj učenika po autobusima bio: $44, 38, 44$. Cijelo se ovo razmišljanje prati tablicom koja izgleda ovako:

stajalište	I. autobus	II. autobus	III. autobus
na kraju	42	42	42
prije trećeg	48	42	36
prije drugog	44	46	36
prije prvog	44	38	44

Lako je uočiti kako sastaviti slične zadatke. Prvo odlučimo koliko ćemo skupina imati (3 autobusa), broj koraka u kojima će biti obavljena premještanja, početnu i završnu situaciju. Podatke u međukoracima biramo proizvoljno uz napomenu da tijekom svih premještanja brojevi moraju biti pozitivni i njihov zbroj mora biti konstantan. Evo jedne tablice za 4 skupine u dva koraka.

stanje	a	b	c	d
na kraju	32	25	25	25
prije prelaska	30	25	27	25
na početku	27	30	26	24

A tekst zadatka koji prati tablicu mogao bi izgledati ovako: *U školu je u četiri odjela prvih razreda upisano 107 djece. Raspored po odjelima oglašen je na oglasnoj ploči, ali već prvi dan nastave došlo je do premještanja iz razreda u razred. Tako je prvi dan iz I.b u I.a premješteno troje učenika, a u I.c i I.d po jedan učenik. Na polugodištu je iz I.c u I.a prešlo dvoje i sad je u I.b, I.c i I.d bio jednak broj učenika, a u I.a ih je bilo 7 više nego u ostalim odjelima. Ta se raspodjela zadržala do kraja godine. Kakva je bila početna raspodjela po odjelima?*

3. tip: Ostatci. *Mario je prvi dan pročitao* $\frac{1}{3}$ *knjige, drugi dan* $\frac{3}{4}$ *nepročitanog dijela knjige, a za treći mu je dan ostalo* 60 *stranica. Koliko stranica ima knjiga?*

Preostalih 60 stranica knjige je $\frac{1}{4}$ nepročitanog dijela knjige nakon prvog dana. Dakle, dio knjige nepročitan nakon prvog dana ima $4 \cdot 60 = 240$ stranica. Ali, taj broj stranica je $\frac{2}{3}$ cijele knjige. Dakle, $\frac{1}{3}$ knjige ima $240 : 2 = 120$ stranica, a cijela knjiga ima $3 \cdot 120 = 360$ stranica.

Kako sastaviti još ovakvih zadataka? Struktura zadatka je očita: izvodi se neka radnja na dijelu cjeline, zatim na preostalom dijelu cjeline, pa na sljedećem ostatku i tako dalje dok se nakon konačno mnogo koraka ne pojavi krajnji ostatak. Problem pri sastavljanju ovakvog tipa zadatka je obično u tome što se radi o zadatcima koji su namijenjeni učenicima koji imaju samo osnovno znanje o razlomcima, te brojevi koji se pojavljuju u zadatku i pri njegovom rješavanju trebaju biti prirodni. Zato pogledajmo kako izgleda prethodni zadatak zadan s pomoću općih brojeva te uočimo veze između tih brojeva.

Mario je prvi dan pročitao $\frac{a_1}{b_1}$ *knjige, drugi dan* $\frac{a_2}{b_2}$ *nepročitanog dijela knjige, a za treći mu je dan ostalo* m *stranica. Koliko stranica ima knjiga?*

Označimo s x broj stranica knjige. Prvi je dan Mario pročitao $\frac{a_1}{b_1}x$ stranica knjige, ostalo mu je

$$x - \frac{a_1}{b_1}x = \left(1 - \frac{a_1}{b_1}\right)x$$

stranica. Drugi je dan pročitao $\frac{a_2}{b_2}$ ostatka, tj. $\frac{a_2}{b_2}\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)x$ stranica knjige. Ostalo mu je

$$\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)x-\frac{a_2}{b_2}\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)x=\left(1-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)x$$

stranica knjige. Taj je zadnji broj jednak m. Odatle očitavamo da je

$$x=\frac{mb_1b_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}.$$

Prirodni brojevi trebaju biti: x, $\frac{a_1}{b_1}x$, $\frac{a_2}{b_2}\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)x$, m. Za to će biti dovoljno zahtijevati da ako a_1, a_2, b_1, b_2 odaberemo proizvoljno tako da su $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, $M(a_1, b_1) = M(a_2, b_2) = 1$, tada za m uzmemo višekratnik broja $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$. Lako se provjeri da se uz takav izbor za ostatak m sve promatrane veličine pojavljuju u cjelobrojnom obliku.

Pokažimo na jednom konkretnom primjeru kako sastaviti zadatak. Odaberemo $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b_1 = 5$, $b_2 = 9$. Tada je $(b_1-a_1)(b_2-a_2) = 2\cdot 5 = 10$. Za broj m uzmemo $m = 20$. I sastavimo zadatak: *Elizabeta je na maturalnom putovanju prvi dan potrošila* $\frac{3}{5}$ *džeparca, a drugi dan* $\frac{4}{9}$ *ostatka. Ostalo joj je* 20 *kn. Koliko je kuna imala Elizabeta na početku maturalnog putovanja?*

Riješimo ovaj zadatak metodom unatrag i učinimo provjeru: 20 kn je $\frac{5}{9}$ ostatka, tj. $\frac{1}{9}$ ostatka je 4 kn, a cijeli ostatak nakon prvog dana je 36 kn. To je $\frac{2}{5}$ cijelog džeparca, pa cijeli džeparac iznosi $(36:2)\cdot 5 = 90$ kn. Napravimo i provjeru. Prvi je dan potrošila $\frac{3}{5}\cdot 90 = 54$ kn i ostalo joj je 36 kn. Drugi je dan potrošila $\frac{4}{9}\cdot 36 = 16$ kn i ostalo joj je 20 kn. Kao što vidimo svi podatci koji se javljaju su prirodni brojevi.

Ovo je ideja kako sastaviti zadatak koji ima dva koraka (2 dana). Razmislite kako sastaviti zadatak koji se odvija u više koraka.

Evo nekoliko zadataka, većinom s matematičkih natjecanja, a za koji je primjerena metoda rješavanja upravo metoda rješavanja unatrag:

1. Jedna obitelj troši mjesečno za hranu $\frac{3}{5}$ ukupne zarade, za stanarinu $\frac{1}{4}$ ostatka novca, a za struju $\frac{1}{3}$ preostalog novca. Kad podmire sve te troškove ostaju im 384 kune. Koliki prihod ima obitelj?
(6. razred/1997., županijsko)

2. Ako neki broj podijelimo s 20, pa dobivenom količniku pribrojimo 3.75 i dobiveni zbroj pomnožimo s 0.4, dobit ćemo broj koji je za 8.25 veći od 20. Koliki je početni nepoznati broj?
(6. razred/1995., općinsko)

3. Ante je jednog dana kupio tri knjige. Za prvu je knjigu platio $\frac{1}{5}$ svote koju je ponio, za drugu $\frac{3}{7}$ preostalog novca, a za treću $\frac{3}{5}$ novca koji mu je ostao nakon kupovine prve dvije knjige. Vratio se kući s 1600 kn. Koliko je Ante imao novaca prije kupovine?
(6. razred/1993., općinsko)

4. Svaki od trojice dječaka kojima su imena Ivan, Ante i Darko, ima izvjestan broj samoljepljivih sličica. Prvo je Ivan dao drugoj dvojici od svojih sličica onoliko koliko je već svaki od njih imao. Zatim je Ante dao ostaloj dvojici onoliko svojih sličica koliko je svaki od njih imao. Na kraju je i Darko ponovio postupak, tj. ostaloj dvojici je dao onoliko sličica koliko je svaki od njih imao. Poslije toga je svaki imao 80 sličica. Koliko je sličica imao svaki od trojice dječaka na početku?
(5. razred/1997. županijsko)

5. Majka je prije odlaska na posao pripremila za svoje tri kćeri košaricu šljiva. Prva se probudila najstarija kćer koja je iz košarice pojela trećinu šljiva. Druga se probudila kći koja je srednja po godinama i računajući da se probudila prva pojela trećinu šljiva iz košarice. Zadnja se probudila najmlađa kći i računajući da se probudila prva uzela je iz košarice trećinu šljiva. Tada je u košarici preostalo 8 šljiva. Koliko je šljiva majka ostavila u košarici?