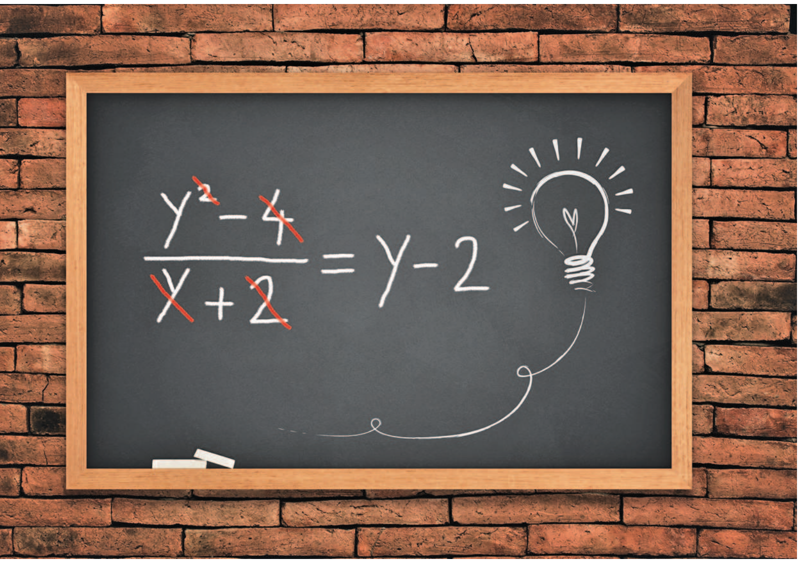
Na pogreškama se uči



Branimir Dakić, Zagreb

"Neka vam nikada ne bude neugodno zbog toga što griješite ... sve dok ste spremni iz pogreške nešto naučiti. Jer često se više nauči kad se griješi s nekim razumljivim razlogom nego kad se postupa točno iz krivog."

Norton Juster, *The Fantom Tollbooth*

Ovaj mali uvodni tekst moto je zanimljivog članka *The Power of a good Mistake* Linde Gojak[1], donedavno predsjednice (vjerojatno) najbrojnije udruge matematičara na svijetu, američkog NCTM-a. Potječe iz knjige *The Fantom Tollbooth* Nortona Justera, poznatog američkog pisca za djecu. Gospođa Gojak u navedenom kraćem članku piše o ulozi učeničkih pogrešaka pri učenju matematike, a u jednom drugom svojem uratku na istu temu zgodno je uklopila primjere pogrešaka iza kojih su ostali debeli tragovi. Tako je, primjerice, zbog pogrešnog postupanja s čokoladom za kuhanje Ruth Wakefield stvorila *chocolate chips*, danas nezaobilazni sastojak jednog od najpopularnijih kolačića na svijetu. Jedna greška ljekarnika Johna Pembertona 1886. godine rezultirala je otkrićem Coca Cole, a pogreškom je 1928. godine Alexander Fleming otkrio penicilin.

Iskustvo nam govori kako se učeničke pogreške u hrvatskim školama nerijetko rigorozno sankcioniraju. Takav pristup kod učenika izaziva strah od pogreške, nelagodu, nervozu, tremu, nedostatak koncentracije i slične negativne osjećaje, svakako nimalo poticajne za produktivno i slobodno učenje. Nasuprot tome poželjna je opuštenost i smiren pristup te primjerena koncentracija na sadržaj učenja. Neki nastavnici o svemu tome ne vode računa, dapače svojim tvrdim pristupom učeničkim pogreškama samo pogoršavaju situaciju. Najbanalniji je primjer iz pismenih provjera znanja u kojima se potpuno odbacuje postupak rješavanja kroz koji je razvidno razumijevanje ili nerazumijevanje određenog sadržaja pa konačno i samo znanje. "*Moj nastavnik ne gleda postupak, njemu je važan samo rezultat*", često će se čuti od naših učenika kada je riječ o pismenim provjerama znanja. Na stranu sada to što zadatci u kojima se zahtijeva podosta računa ponekad i nemaju smisla, a izazovni su jedino u smislu moguće pogreške.

[1] `http://mathleadershipcorps.com/wp-content/uploads/2014/03/The-Power-of-a-Good-Mistake.pdf`

Kad je riječ o pogreškama na pamet mi padaju tri uzrečice. Prva je "*Griješiti je ljudski*", druga "*Tko radi, taj i griješi*" i treća "*Na greškama se uči*". Sve tri dakako imaju puno smisla i u svima je sadržana važna životna istina. I dok se prvoj i drugoj nema što dodati, jer one su naprosto životno iskustvo, treća ipak zaslužuje širu obradu. Osobito kada je riječ o nastavi i učenju matematike.

Ako smo prihvatili načelo "griješiti je ljudski", postavimo prirodno pitanje što onda nakon pogreške slijedi. Kao i u svakodnevnom životu, pogrešku treba i ispraviti. U neka prošla vremena kada su se pisale tzv. školske zadaće u posebnim bilježnicama ("zadaćnicama" iz matematike), po dvije u svakom polugodištu (sadržavale su manji broj složenijih zadataka), nastavnik bi pregledao uratke svih učenika, a potom bi se pisao "ispravak" u istu bilježnicu. Bio je to uobičajen i vrlo temeljit postupak. U novije doba nema "zadaćnica", pismeni ispiti znanja obično se pišu u upola kraćem vremenu pa onda i s manje složenim zadacima. I analize pismenih ispita sve su rjeđe premda je njihova uloga u procesu učenja poprilično važna.

Kritičnost, koju razvijamo učeći matematiku jedan je od najvažnijih odgojnih ciljeva ovog područja učenja. Nije problem pogriješiti, ali nije dobro prijeći preko pogreške, ne uočiti je i po mogućnosti je ispraviti. Često se čudimo nekritičnosti naših učenika koji mirne duše prihvate neki rezultat koji je već na prvi pogled nemoguć. A koliko pozornosti uopće pridjeljujemo ovom problemu? Rad na pogreškama važan je dio učenja matematike i valja ga ugraditi u svakodnevni rad u nastavi. Ne radi se samo o otkrivanju i otklanjanju numeričkih pogrešaka već je potrebno istaknuti i ukazivanje pogrešaka drugih naravi kao što je krivo razumijevanje, nedostatak argumentacije i slično.

U ovom članku nećemo se baviti problemom pogrešaka na općoj razini, pogotovo ne pogreškama iz područja metodike koje čine nastavnici, već ćemo na konkretnim probranim primjerima prikazati kako se pogreške mogu koristiti kao didaktičko sredstvo, kao jedna metoda u procesu učenja matematike. Najprije evo jednog od najčešćih primjera tipa "otkrij pogrešku". Učenicima se predoči određeni račun koji završava nekim netočnim zaključkom te se od njih zahtijeva da pronađu gdje se skrila pogreška.

Polazimo od točne jednakosti

$$16 - 36 = 25 - 45,$$

S obje njezine strane dodajmo isti broj $20\,\dfrac{1}{4}$

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}.$$

Uočavamo kako jednakost možemo zapisati u obliku

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

Zaključujemo: Ako su kvadrati brojeva jednaki, jednaki su i brojevi. Dakle:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}.$$

I konačno dobivamo netočnu jednakost:

$$4 = 5.$$

Ovaj je primjer dobro navesti uz početnu obradu funkcije apsolutne vrijednosti realnog broja jer on upozorava na zanemarivanje sljedećeg svojstva te funkcije:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Napomenimo kako je ovaj identitet važan zbog jednoznačnosti korijenske funkcije. Naime, drugi korijen iz pozitivnog realnog broja po definiciji je pozitivan broj, a taj se zahtjev osigurava apsolutnom vrijednošću.

Tako onda nije točno $\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} = 4 - \frac{9}{2}$ već je točno $\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} = \left|4 - \frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} - 4.$

S druge strane, točno je $\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2} = 5 - \frac{9}{2}$ jer je $5 > \frac{9}{2}$. Zaključujemo da smo pogriješili u pretposljednjem retku računa.

U primjenama određenih algebarskih identiteta često se postupa površno i netočno te se čine razne pogreške.

Promotrimo ovaj zapis:

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{(-1)^2}$$
$$=\sqrt{1}=1.$$

S druge je strane $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1.$

Ova neusklađenost rezultata posljedica je nekritične primjene identiteta $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ koji za realne brojeve vrijedi jedino uz uvjet $a\geq 0$, $b\geq 0$.

U navedenom primjeru pogreška je uočljivija nego kad se radi o općenitijim algebarskim izrazima i funkcijama. Tako imamo ovaj primjer standardne pogreške:

$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}=\sqrt{(x-1)(x-2)}$$
$$=\sqrt{x^2-3x+2}.$$

Ako ovdje ne navedemo ograničenja, nije dobro. Zbog čega? U čemu smo pogriješili? Funkcija $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$ definirana je za sve realne brojeve za koje je $x-1\geq 0$ i $x-2\geq 0$, odnosno za sve brojeve $x\geq 2$. S druge strane, funkcija $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ definirana je za sve realne brojeve za koje je $x^2-3x+2\geq 0$, a to je skup brojeva $x\leq 1$ ili $x\geq 2$. Prema tome, zapisana jednakost je točna samo za brojeve $x\geq 2$.

Slične se pogreške pojavljuju i pri nekritičnoj primjeni identiteta $\log(a\cdot b)=\log a+\log b$. Ova je jednakost identitet na skupu pozitivnih realnih brojeva i o tome valja voditi računa. U suprotnom imamo isti problem kao u prethodnom primjeru. Naime $\log(a\cdot b)$ je definirana za sve realne brojeve a i b za koje je $a\cdot b>0$, dok je $\log a+\log b$ definirano samo za $a>0$ i $b>0$.

Slično je i s identitetom $\log x^n=n\cdot\log x$, $n\in\mathbf{N}$, koji je zapravo poopćenje identiteta $\log(a\cdot b)=\log a+\log b$. Ako je riječ o logaritmima potencija s parnim eksponentom, onda je ispravno zapisati $\log x^n=n\cdot\log|x|$. Možda ćemo biti uvjerljiviji ako navedemo primjer $\log x^2=2\log x$. Broj x^2 je pozitivan broj za sve $x\neq 0$ pa za sve te brojeve onda ima smisla $\log x^2$. Međutim $2\log x$ ima smisla samo za $x>0$. Za neparne n mora biti $x>0$.

Vratimo se jednostavnijim primjerima iz elementarne algebre. Slijedi jedan kojim se pokazuje kako dijeljenje s nulom nije definirano.

Krećemo od jednakosti $a=b$ i neka su ti brojevi različiti od nule. Pomnožimo njezine obje strane s a i s obiju strana nove jednakosti oduzmimo b^2. Tako onda imamo

$$a^2-b^2=ab-b^2.$$

Dalje je $(a-b)(a+b)=b(a-b)$. Odatle slijedi $a+b=b$. No $a=b$ pa je $2b=b$, odnosno $b=\dfrac{b}{2}$. Kako je $b\neq 0$, zaključujemo: *Svaki je broj jednak svojoj polovini.*

Gdje je pogreška u ovom izvodu? Kako je $a=b$, onda je $a-b=0$ i bilo je pogrešno dijeliti s tim brojem.

Brojni su upravo primjeri ove vrste. Možemo navesti i primjer vezan uz obradu logaritama u srednjoj školi. Otkrijte pogrešku u zaključivanju:

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$
$$\log\frac{1}{4}<\log\frac{1}{2}$$
$$2\log\frac{1}{2}<\log\frac{1}{2}$$
$$2<1.$$

Pogrešku nalazimo u predzadnjem retku. Naime, $\log\dfrac{1}{2}=-\log 2<0$ pa zapravo slijedi točna nejednakost $-2<-1$, a ne netočna $2<1$.

Kad smo već kod primjera numeričkih zadataka evo još jednog koji ukazuje na neophodnost prvog koraka pri dokazu tvrdnje matematičkom indukcijom:

Matematičkom indukcijom valja dokazati da je broj $1^{4n}+2^{4n}+3^{4n}+4^{4n}$ *djeljiv s 5 za svaki prirodni broj* n.

Pustimo po strani "bazu indukcije" i dokažimo da pretpostavka istinitosti tvrdnje za prirodni broj k povlači istinitost tvrdnje za sljedbenik $k+1$.

Pratite sljedeći niz zapisa:

$$\begin{aligned}
&1^{4(k+1)}+2^{4(k+1)}+3^{4(k+1)}+4^{4(k+1)}\\
&\qquad-(1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}+4^{4k})\\
&=1^{k+1}+16^{k+1}+81^{k+1}+256^{k+1}\\
&\qquad-(1^{k}+16^{k}+81^{k}+256^{k})\\
&=(16\cdot 16^k-16^k)+(81\cdot 81^k-81^k)\\
&\qquad+(256\cdot 256^k-256^k)\\
&=15\cdot 16^k+80\cdot 81^k+255\cdot 256^k\\
&=5(3\cdot 16^k+16\cdot 81^k+51\cdot 256^k).
\end{aligned}$$

Kako je $1^{4k}+2^{4k}+3^{4k}+4^{4k}$ djeljiv s 5 po pretpostavci, a rezultat oduzimanja je također djeljiv s 5, onda je s 5 djeljiv i broj $1^{4(k+1)}+2^{4(k+1)}+3^{4(k+1)}+4^{4(k+1)}$. A to smo upravo željeli dokazati. Obuzeti ovim rezultatom zaboravili smo na "bazu indukcije" pa ćemo to sada ispraviti.

Uzmimo $n=1$, tada je $1+16+81+256=354$, dakle broj koji nije djeljiv s 5.

Štoviše, broj $1^{4n}+2^{4n}+3^{4n}+4^{4n}=1^n+16^n+81^n+256^n$ nije djeljiv s 5 niti za koji prirodni broj n. Naime, brojevi 16^n i 256^n završavaju sa 6, a brojevi 1^n i 81^n završavaju s 1 pa zbroj $1^{4n}+2^{4n}+3^{4n}+4^{4n}$ završava s 4 te nikada nije djeljiv s 5.

Kada je riječ o rješavanju jednadžbi i nejednadžbi onda vrebaju mnoge zamke kojih treba biti svjestan i otklanjati ih. Jednostavan su primjer jednadžbe poput sljedeće:

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2-x}=\frac{5}{3x-3}.$$

Standardno tu jednadžbu množimo s $3x(x-1)$ te dobijemo jednadžbu $6(x-1)+6=5x$. Odatle slijedi $x=0$. No ovaj je broj rješenje jednadžbe koju smo dobili množenjem, a nije rješenje zadane jednadžbe. Zašto? Zato jer te dvije jednadžbe nisu ekvivalentne. One su zapravo ekvivalentne na skupu $\mathbf{R}$, ali uz ograničenje $x\neq 0$ i $x\neq 1$. Kod ovog zadatka, a slično valja postupiti i u drugim zadatcima ove vrste, bilo bi dobro već na samom početku uvesti ogradu: $x\neq 0$ i $x\neq 1$.

[2] Dakić, Elezović, Matematika 2, II. dio, str. 43., Element 2014.

Zamke vrebaju i pri rješavanju jednadžbi i nejednadžbi vezanih uz eksponencijalne i logaritamske funkcije i njihova temeljna svojstva. U sljedećem primjeru[2] ispisano je rješenje jedne eksponencijalne jednadžbe. U raspisu je načinjeno nekoliko grubih pogrešaka. Možete li ih otkriti?

$$\begin{aligned}
4^x+9^x&=2\cdot 6^x\\
\log(4^x+9^x)&=\log(12^x)\\
\log 36^x&=\log 12^x\\
\log 36^x-\log 12^x&=0\\
\log\frac{36^x}{12^x}&=0\\
\log 3^x&=0\\
3^x&=1\\
x&=0.
\end{aligned}$$

Provjera će pokazati kako je rezultat točan. To je još jedan razlog više da budemo oprezni. Kako riješiti ovu jednadžbu? Valja uočiti da je ona ekvivalentna jednadžbi

$$(2^x-3^x)^2=0$$

Slijedi $2^x=3^x$ te je $x=0$.

Jednadžbu smo mogli podijeliti s 9^x pa bismo dobili kvadratnu jednadžbu $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+1=0$ s diskriminantom jednakom nuli pa je riječ o jednadžbi oblika $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-1\right)^2=0$. Slijedi $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$ i konačno $x=0$.

U nekim jednadžbama rješenje možemo vidjeti iz samog zapisa, a da ih ne rješavamo. Tako primjerice jednadžba $4^x+2^x+1=0$ nema rješenja i to valja odmah uočiti. Naime, s lijeve strane imamo zbroj triju pozitivnih brojeva i on ne može biti jednak nuli niti za koji realan broj x.

Podsjećamo čitatelje da je u broju 4 časopisa **Matematika i škola** objavljen članak Antona Cedilnika *Optužujem!* u kojem je navedeno pet različitih netočnih postupaka rješavanja jedne eksponencijalne jednadžbe, a u svima je konačan rezultat točan.

Također valja biti pažljiv i pri rješavanju trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi. Čini se kako suviše složeni zadatci iz tog područja mogu biti neproduktivni (pa čak i kontraproduktivni) za učenje jer osim težine nemaju osobit smisao na ovom stupnju učenja. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe mogu imati velik didaktički učinak jer se pri njihovom rješavanju uključuje sve ranije stečeno znanje iz ovog gradiva. Uz to, rješavanje može pratiti i primjena jednostavnih računalnih programa dinamičke geometrije. Evo jednog primjera:

Riješite jednadžbu

$$\sin x + \cos x = 2.$$

Kad učenicima postavimo ovaj zadatak vjerojatno će neki od njih istog trena uočiti kako zadana jednadžba nema rješenja. Obrazloženje: S lijeve njezine strane imamo dvije funkcije čija je najveća vrijednost jednaka 1, a kako je postižu za različite vrijednosti varijable x, onda njihov zbroj nikada nije jednak 2.

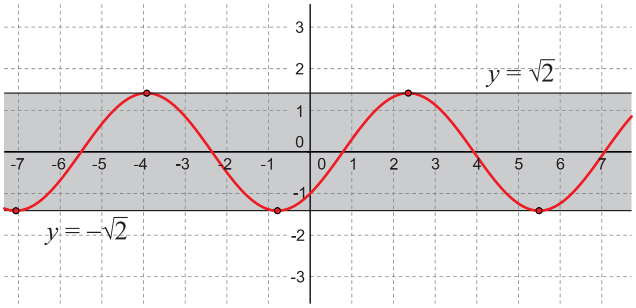
Umjesto odustajanja od daljnjeg rješavanja neka slijedi pitanje: Koji broj uopće možemo zapisati s desne strane ove jednadžbe, a da ona ima smisla. Odnosno, za koji realni broj a jednadžba $\sin x + \cos x = a$ ima rješenja?

Najprije zapišimo jednadžbu u pogodnijem obliku primjenjujući identitet za pretvorbu zbroja dviju trigonometrijskih funkcija u umnožak:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin(90^\circ - x) &= 2\sin 45^\circ \cos(45^\circ - x)\\ &= \sqrt{2}\cos(45^\circ - x).\end{aligned}$$

Ovaj nam rezultat govori ono što smo već ranije zaključili: s desne strane jednadžbe ne može stajati broj 2. Najmanji broj koji tu može biti je broj $-\sqrt{2}$, a najveći $\sqrt{2}$.

Mogli smo u ovaj zadatak uklopiti i sljedeće razmišljanje: Želimo odrediti skup vrijednosti funkcije $f(x) = \sin x - \cos x$. Odgovor potražimo uz pomoć *GeoGebre*. Prikažimo grafički funkciju f (vidi sliku 1).



Slika 1.

Potvrđuje se prethodno nađeno rješenje $\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) \leq -\sqrt{2}$. Ovakva provjera ima smisla već i zbog toga što se pri njoj povezuju razne interpretacije problema.

Uz navedene primjere navest ćemo još neke u kojima su učinjene pogreške koje možda ipak nešto jače zadiru u razumijevanje određenih matematičkih sadržaja.

Evo jednog primjera uz obradu Pitagorina poučka a koji (taj primjer) potječe iz jednog, nešto starijeg udžbenika matematike. Nakon obrade Pitagorina poučka slijedi zadatak: Provjeri je li trokut s duljinama stranica 12, 35 i 37 pravokutan. I sada se uočava kako bi, ako je trokut pravokutan, stranice duljina 12 i 35 bile katete, a stranica duljine 37 hipotenuza pa valja provjeriti jednakost $12^2 + 35^2 = 37^2$. Ona je točna. Dakle, trokut jest pravokutan. Da, istina, trokut jest pravokutan samo taj zaključak ne slijedi iz Pitagorina poučka već njegova obrata, koji nasreću vrijedi.

Iz istog udžbenika potječe još jedna ozbiljna pogreška vezana uz poznati Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice. Premda se i ovdje ponekad radi o pogrešnoj argumentaciji uz dokaz određenih tvrdnji pa se umjesto obrata poziva na sam poučak, nije riječ o tome. Nakon što je dokazan poučak o obodnom i središnjem kutu umjesto da se iz njega izvede Talesov poučak kao poseban slučaj, pristupa se dokazivanju Talesova poučka kao nezavisne činjenice.

Početno učenje trigonometrije veže se uz geometrijsku obradu pravokutnog trokuta. Osnovne funkcije definiraju se kao omjeri duljina stranica tog trokuta pa je uz njegove standardne oznake $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Ako zbrojimo kvadrate ovih jednakosti, dobit ćemo:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

a odatle slijedi $a^2 + b^2 = c^2$. I sada ovaj postupak tumačimo kao jedan moguć dokaz Pitagorina poučka. No je li to u redu? Na prvi pogled jest. Međutim, problem je u identitetu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. On je upravo proistekao iz Pitagorina poučka pa to znači da smo Pitagorin poučak dokazali primjenom Pitagorina poučka.

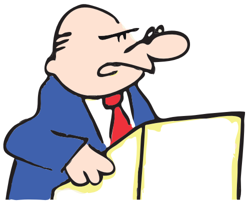
Sada se okrenimo primjerima koji su preuzeti iz svakodnevice, koji prije svega ukazuju na nekritičnost u iznošenju podataka u raznim novinama i drugim javnim medijima. Najčešće je to slučaj s raznim podatcima izraženim u postotcima, a riječ je o načelnim, a ne numeričkim pogreškama. Takvi primjeri osobito su dobrodošli kao zorne ilustracije potrebe kritičnosti, a kao odličan didaktički materijal. Evo primjera:

Opet poskupjelo gorivo. Noćas je bezolovni benzin poskupio za 4.5 %, što je već treće poskupljenje ove godine. Ranije, u dva je navrata benzin poskupio najprije za 3.2 % pa onda još i za 4.8 %. Na taj način ukupno je poskupljenje od 12.5 %.

Naravno, računica je netočna. Cijena benzina (c) nakon prvog poskupljenja iznosila je $c + 0.032c = 1.032c$. Zatim je ta cijena, a ne ona početna, porasla za 4.8 %. Dakle je $1.032c + 0.048 \cdot 1.032c = 1.032(1+0.048)c = 1.032 \cdot 1.048c = 1.081536c$. I konačno, nakon trećeg poskupljenja imamo: $1.081536c + 0.045 \cdot 1.081536c = 1.081536(1 + 0.045)c = 1.081536 \cdot 1.045c = 1.13020512c$.

U promatranom razdoblju poskupljenje goriva bilo je 13 %, a ne 12.5 % kako je to u novinama pogrešno napisano.

Sličan se zadatak nalazi i u udžbeniku za 1. razred gimnazije[3].



U predizbornoj kampanji jedan je političar obećao kako će njegova stranka za vrijeme svojeg četverogodišnjeg mandata ukinuti PDV na knjige koji sada iznosi 20 % i to tako što će ga svake godine umanjiti za 5 % u odnosu na prethodnu godinu. Može li taj političar, bude li izabran, ispuniti svoje obećanje?

Još je jedna zanimljiva pogreška vezana uz postotni račun. Možete li je otkriti u sljedećem zadatku?

U nekom razredu 2 učenika (6.25 %) ocijenjena su negativnom ocjenom iz matematike, s ocjenom dovoljan nije bilo niti jednog učenika, 18 (58.25 %) ih je ocijenjeno s ocjenom dobar, 8 (25 %) s ocjenom vrlo dobar, a 4 (12.5 %) učenika ocijenjena su s odličan. Što nije u redu s ovim podatcima?

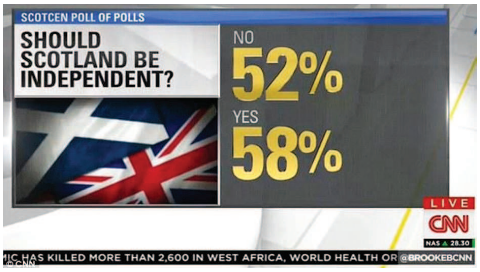
Najprije uočavamo da je zbroj svih postotaka jednak $6.25 + 58.25 + 25 + 12.5 = 102$. To, naravno nije moguće, taj zbroj bi morao biti jednak 100. Gdje je pogreška? Najprije nalazimo da je u razredu ukupno 32 učenika. Pri provjeri postotaka zaključit ćemo kako 18 učenika s ocjenom dobar čini u postotcima 56.25 %, a ne 58.25 %. Upravo za te dvije jedinice zbroj je bio veći od 100.

Sličan zadatak mogli smo zadati s razlomcima pa bi on glasio:

U nekom razredu osmina učenika je zadovoljila na pismenom ispitu iz matematike, trećina ih je ocijenjena ocjenom dobar, četvrtina ocjenom vrlo dobar, a šestina ih je bilo odličnih.

Pokazuje se kako nešto nije u redu. Jer u razredu je $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{21}{24}$, a zbroj bi trebao iznositi 1. Pokušajte "popraviti" zadatak. Možda se radi o tome da su zaboravljeni oni s ocjenom nedovoljan.

[3] Dakić, Elezović, Matematika 1, Element 2014., str. 30., zad. 24.



Lijep primjer pogreške ove vrste jest i CNN-ova obavijest o rezultatima referenduma za samostalnost Škotske provedenog u četvrtak, 18. rujna 2014. godine. Prema njemu glasovalo je ukupno $110\ \%$ Škota. Kako svaki glasač ima pravo na jedan glas, to nije moguće. Na ovoj uglednoj televiziji brzo je uočena pogreška te je ispravljena.

Raznoraznih primjera pogrešaka u medijima imamo i u drugim područjima, ne samo u postotcima Evo dvaju koji su preuzeti iz već spomenutog udžbenika za 1. razred gimnazije.[4]

U jednoj popularno-znastvenoj TV emisiji rečeno je da vidra po jednom četvornom centimetru tijela ima prosječno $20\,000$ *dlaka što znači da je ukupan broj dlaka na tijelu vidre oko* $8 \cdot 10^9$ *dlaka. Ovaj se račun pokazuje nevjerodostojnim. Zašto?*

Podijelimo li $\dfrac{8 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^4} = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{cm}^2$ dobit ćemo ukupnu površinu vidrina tijela. Kako je $1\ \mathrm{m}^2 = 10^4\ \mathrm{cm}^2$ onda je ta površina jednaka $40\ \mathrm{m}^2$, što je nemoguće. Naime, na internetu nalazimo da je vidra duga do $75\ \mathrm{cm}$ i da joj je tjelesna masa do $11\ \mathrm{kg}$. Doduše, vidra ima i dug rep, ali je sigurno da površina njezina tijela ne može iznositi $40\ \mathrm{m}^2$. Grubi račun bi pokazao kako bi u tom slučaju promjer vidrina tijela bio veći od 5 metara.

Još je jedan sličan primjer u istom udžbeniku i on glasi:

U Riplayevoj knjizi "Vjerovali ili ne" iz godine 1932. između ostalog stoji kako je Kineski zid, jedno od svjetskih čuda, vidljiv golim okom i s Mjeseca. Ta je građevina ukupno duga oko $8800\ \mathrm{km}$, *a njezina najveća širina je* $9.1\ \mathrm{m}$. *Je li tvrdnja vjerodostojna?*

Usporedimo vidljivost Kineskog zida s Mjeseca s vidljivošću vlasi ljudske kose s neke udaljenosti d. Uzmimo da je promjer ljudske vlasi $8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{km}$. Udaljenost Zemlje od Mjeseca iznosi $384\,400\ \mathrm{km} = 3.844 \cdot 10^5\ \mathrm{km}$. Postavimo omjer

$$d : 3.844 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^{-8} : 9.1 \cdot 10^{-3}.$$

Odatle je $d = \dfrac{3.844 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-8}}{9.1 \cdot 10^{-3}} \approx 3.38\ \mathrm{km}$.

Dakle tvrdnja da se Kineski zid vidi s Mjeseca odgovara tvrdnji da je ljudska vlas vidljiva s udaljenosti veće od $3\ \mathrm{km}$.

[4] Dakić, Elezović, Matematika 1, Element, Zagreb, str. 54., zad.2., str. 58., zad. 27.