Modeliranje u nastavi matematike

Amalija Žakelj, Ljubljana

U tekstu će biti predstavljeno matematičko modeliranje u poučavanju matematike. Usredotočili smo se na empirijski pristup u određivanju veze između vrijednosti na temelju prikupljenih podataka sa i bez upotrebe računala, odnosno koristeći analitički pristup.

Uvod

Matematičko modeliranje u školi primjer je integriranog učenja koje je utkano u opće ciljeve i kompetencije predmeta matematike (Žakelj i dr., 2011.), u prirodoslovno-matematičke sposobnosti za razvoj kompleksnog mišljenja, u procesna znanja, u aktivnosti za razvoj međupredmetnih veza kao i u aktivnosti za razvoj kompetencija.

Matematičko modeliranje je pronalaženje i testiranje matematičkog prikaza (modela) za neki realan objekt ili proces. U odabrane situacije unosimo načela i principe matematike i tako prevodimo realnost u matematičku okolinu. Npr. rast stanovništva modeliramo eksponencijalnom funkcijom. Neka sniženja vrijednosti robe na tržištu (npr. sa starošću se vrijednosti automobila i stanova smanjuju) možemo prikazati eksponencijalnim padom, a razmnožavanje bakterija modeliramo eksponencijalnim rastom. Modeliranje pretpostavlja poznavanje modeliranih pojava (recimo fizikalnih zakona), matematičkih alata, tehnika modeliranja i kritičnosti kod upotrebe modela (Žakelj, 2010.). Kod sastavljanja matematičkog modela poštujemo fizikalne ili neke druge zakone, npr. u društvenim znanostima.

Posebno trebamo biti pažljivi kod matematičkih modela u društvenim znanostima jer je ljudsko društvo prilično nepredvidivo, a lako je moguće da iza modela stoje i određeni interesi. Slabi nam modeli lako mogu dati krive ili pak obmanjujuće rezultate. Sjetimo se engleskog ekonomista Thomasa R. Malthusa. On je 1800. godine pravilno ustanovio da stanovništvo raste eksponencijalno, u SAD-u brže nego u industrijaliziranim europskim državama. No, u njegovom su se modelu sredstva za preživljavanje povećavala tek kao linearna funkcija vremena. S vremenom bi na svakoga stanovnika došlo sve manje hrane. Zbog toga bi glad, rat i bolest ograničili rast stanovništva. Drugi način za zaustavljanje rasta stanovništva Malthus je vidio u porocima, siromaštvu ili pak održivosti. Poduzetnici, koji su minimalno plaćali radnike, u toj su teoriji našli odlično opravdanje. Kad bi bili blagonakloni (odnosno kad bi više radnicima davali), po Malthusu bi samo nekontrolirano rastao broj stanovnika (Legiša, 2003.).

Modeliranje je ciklički proces. Koraci matematičkog modeliranja su:

1. razumijevanje procesa i identificiranje problema
2. oblikovanje pretpostavki i matematička formulacija:
   a) identificiranje i klasificiranje varijabli
   b) pronalaženje veze između varijabli i pomoćnih modela
3. postavljanje modela / rješavanje modela
4. određivanje valjanosti modela:
   a) Odnosi li se model na problem?
   b) Je li model smislen?
   c) isprobavanje modela s pomoću realnih podataka
5. upotreba (implementacija) modela / interpretacija modela
6. poboljšavanje modela.

Kod modeliranja realnih situacija vrijedi pravilo da je lako moguće više rješenja (modela), ni jedan model nije sasvim ispravan, moguće je da je manje ili više prikladan.

Primjeri modeliranja

Primjer 1. Uspostavljanje veze među vrijednostima na temelju skupljenih podataka uz upotrebu računala (empirijski pristup)

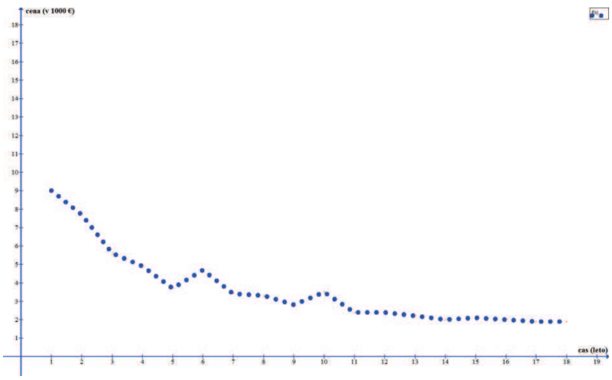
Zanima nas kako se s godinama mijenja vrijednost automobila. Skupili smo podatke o promjeni cijena za starije automobile marke XXS (tablica 1).

Tablica 1. Cijene automobila

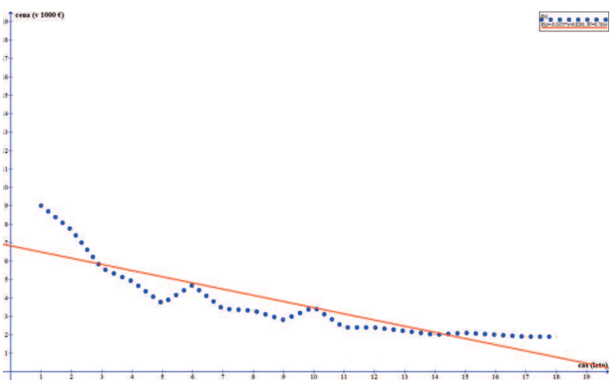
Starost automobila XXS (u godinama)	Cijena automobila XXS (u tisućama €)
1	9.0
2	7.7
3	5.6
4	4.9
5	3.7
6	4.7
7	3.4
8	3.3
9	2.8
10	3.5
11	2.4
12	2.4
13	2.2
14	2.0
15	2.1
16	2.0
17	1.9
18	1.9

Postavljanje modela upotrebom *open source* programa *Graph* (Repolsk, 2010.):

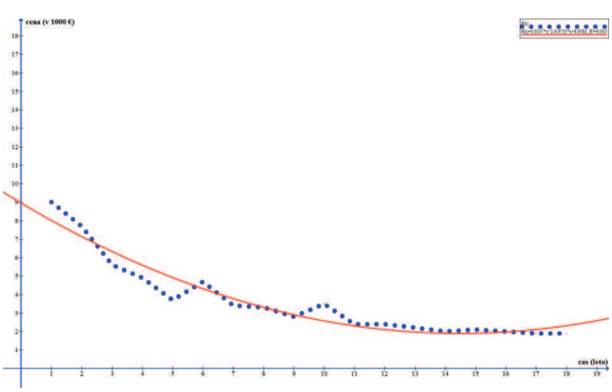
a) Prikazujemo dane podatke kao točke u koordinatnom sustavu (slika 1);
b) Potražimo i isprobajmo nekoliko primjera grafova funkcija koje modeliraju dane podatke (npr. za linearnu, kvadratnu i eksponencijalnu funkciju – slike 2, 3 i 4);
c) Što na temelju podataka i modela možemo zaključiti o vrijednosti automobila kroz godine? Kako bismo mogli provjeriti točnost izabranog modela?



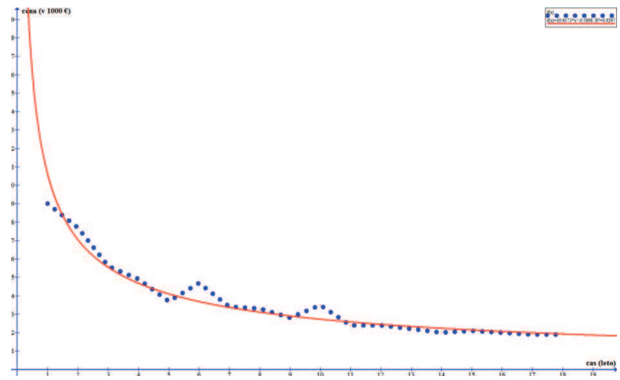
Slika 1. Točke u koordinatnom sustavu



Slika 2. Graf linearne funkcije $f(x) = -0.335x + 6.826$



Slika 3. Graf kvadratne funkcije $f(x) = 0.0337x^2 - 0.975x + 8.9$



Slika 4. Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = 10.617 \cdot x^{-0.589}$

Ako uspoređujemo modelne funkcije prema odgovaranju njihovih grafova i empirijski dobivenih podataka, možemo reći da su na danom području svi modeli primjereni, pri čemu je nekoliko točnih modela kvadratne i eksponencijalne funkcije. Za odabir najprimjerenije modelne funkcije moramo **poštivati kontekst** (realističnu situaciju). Uz zajedničko razmatranje konteksta i dobivenih podataka možemo oblikovati zaključak da cijena najviše pada u prvim godinama, a kasnije sve manje. Također, možemo zaključiti da cijena automobila nikada neće biti jednaka 0, zato linearni model otpada. Isto tako, za ovaj zadatak nije vjerojatno da bi s godinama cijena rasla (ako zanemarimo vrijednost zaista starih automobila), zato otpada i model kvadratne funkcije. Zato kao najrealističniji ostaje model eksponencijalne funkcije $f(x) = 10.617 \cdot x^{-0.589}$.

Primjer 2. Analitičko pronalaženje linearne ovisnosti između vrijednosti na temelju danih podataka (empirijski pristup)

Kino Kolosej ima na internetu objavljen cjenik za kinoprojekcije u kalendarskoj godini. Nude dvije mogućnosti plaćanja.

Ponuda A: cijena za kinopredstavu: 1.5 € po predstavi.

Ponuda B: 2 € za godišnju članarinu i 1.3 € po predstavi.

Markova situacija. Marko je uspoređivao obje ponude. U kalendarskoj godini namjerava jedanput mjesečno gledati izabranu kinopredstavu. Koja ponuda je za njega cjenovno prihvatljivija?

Ponuda A: *Za 12 predstava:* $12 \cdot 1.5$ € $= 18$ €

Ponuda B: *Za 12 predstava:* $2 + 12 \cdot 1.3$ € $=$ 17.6 €

Rješenje i odluka: Za Marka je jeftinija ponuda B.

Matematički model. Ponudu prikazujemo matematičkim modelom. Za ponude A i B modeliramo promjenu iznosa koji ovisi o broju plaćenih ulaznica s obzirom na druge podatke (npr. članarinu kod ponude B).

a) Oblikovanje pretpostavki i matematička formulacija

Odlučimo se za analitički pristup procjene linearnog odnosa među veličinama (tablica 2), gdje je

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

i

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x).$$

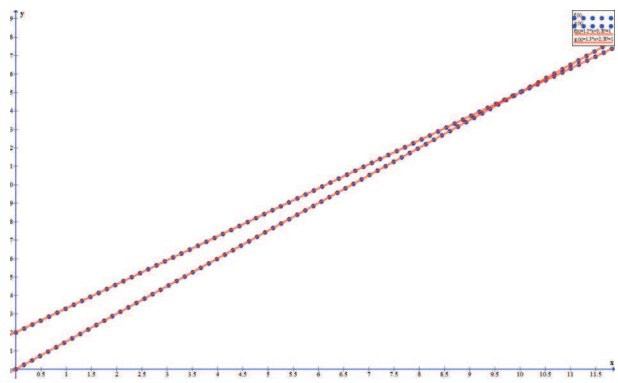
Tablica 2. Iznosi za plaćanje ulaznica

Broj ulaznica	Iznos (u €) za ponudu A		Iznos (u €) za ponudu B	
X	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$g(x)$	$\Delta g(x)$
0	0	1.5	2	1.3
1	1.5	1.5	3.3	1.3
2	3.0	1.5	4.6	1.3
3	4.5	1.5	5.9	1.3
4	6.0	1.5	7.2	1.3
5	7.5	1.5	8.5	1.3
6	9.0	1.5	9.8	1.3
7	10.5	1.5	11.1	1.3
8	12.0	1.5	12.4	1.3
9	13.5	1.5	13.7	1.3
10	15.0	1.5	15.0	1.3
11	16.5	1.5	16.3	1.3
12	18.0	1.5	17.6	1.3

Zaključujemo da je $\Delta f(x) = 1.5$ i $\Delta g(x) = 1.3$ za svaki x. Kako su $\Delta f(x)$ i $\Delta g(x)$ konstantne i različite od 0, podatke možemo modelirati linearnom funkcijom.

b) Postavljanje modela

Koristeći podatke u tablici oblikujemo modelne funkcije $f(x) = 1.5x$ za ponudu A i $g(x) = 1.3x+2$ za ponudu B. Analitički dobivene funkcije moguće je uspoređivati s funkcijama, čije nam grafove na temelju danih podataka izračuna i nacrta program *Graph* (slika 5).



Slika 5. Grafovi funkcija $f(x) = 1.5x$ i $g(x) = 1.3x + 2$

c) Valjanost modela

S matematičkog stanovišta provjeravamo korektnost modelnih funkcija. Njenu upotrebu možemo testirati na raznim primjerima. No, potpuno drukčije je kada testiramo valjanost modela sa stanovišta realistične situacije. Često se dobiva da upotreba modela nije "čista" poput matematike. I u danom primjeru, koji je vrlo jednostavan, može nastati problem ako je Kolosej zatvoren zbog nepredviđenih renoviranja ili ako Marko ne može svaki mjesec u kino zbog neočekivanih obveza. To samo znači da matematički model ne mora uključiti sve okolnosti koje se mogu dogoditi u realnoj situaciji. Zato interpretacija o valjanosti modela sa stanovišta realne situacije nije tako jednostavna. S druge strane, upotrebom matematičkih modela možemo doći do novih rezultata kod svake promjene podataka; formule, modeli, grafički prikazi i slično **imaju univerzalnu upotrebljivu vrijednost**. Markov izračun pokazuje cijenu za samo 12 ulaznica, uspoređuje rezultate s uporabom modela pa pokazuje da plaćanje po ponudi B nije uvijek jeftinije. Pokazalo se da je npr. kod 10 prodanih ulaznica cijena kod obje ponude jednaka, a za posjetu manje od 10 predstava bolja je ponuda A. Na kraju:

- Kritički promišljamo o granicama danog modela
- Razmislimo o pretpostavkama na temelju kojih je nastao model
- Razmislimo o uporabi danog modela u različitim situacijama.

Primjer 3. Analitičko pronalaženje eksponencijalne veze među veličinama na temelju prikupljenih podataka (empirijski pristup)

Dijeljenje stanica (primjer eksponencijalnog rasta): istraživači u laboratoriju su proučavali dijeljenje stanica i sakupili sljedeće podatke (tablica 3).

Tablica 3. Dijeljenje stanica

Vrijeme (dani)	Broj stanica
T	$f(t)$
3	452
4	633
5	886
6	1240
7	1736
8	2431
9	3403
10	4765
11	6670
21	...

a) Oblikovanje pretpostavke i matematička formulacija

Do modelne funkcije dolazimo analitičkim određivanjem eksponencijalne veze između veličina na temelju danih podataka. U tablici 3 dodajemo treći stupac "koeficijenti" i računamo kvocijente $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ (tablica 4).

Tablica 4. Dijeljenje stanica

Vrijeme (dani)	Broj stanica	Koeficijenti
t	$f(t)$	$\frac{f(t+1)}{f(t)}$
3	452	1.4
4	633	1.4
5	886	1.4
6	1240	1.4
7	1736	1.4
8	2431	1.4
9	3403	1.4
10	4765	1.4
11	6670	1.4
...	...	

b) Postavljanje modela

Na temelju zaključka da su koeficijenti $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ konstantni i različiti od nule zaključujemo da se radi o eksponencijalnom modelu.

$$\frac{f(t+1)}{f(t)} = 1.4 \quad \text{za svaki } t.$$
$$a = 1.4$$
$$f(t) = k \cdot 1.4^t.$$

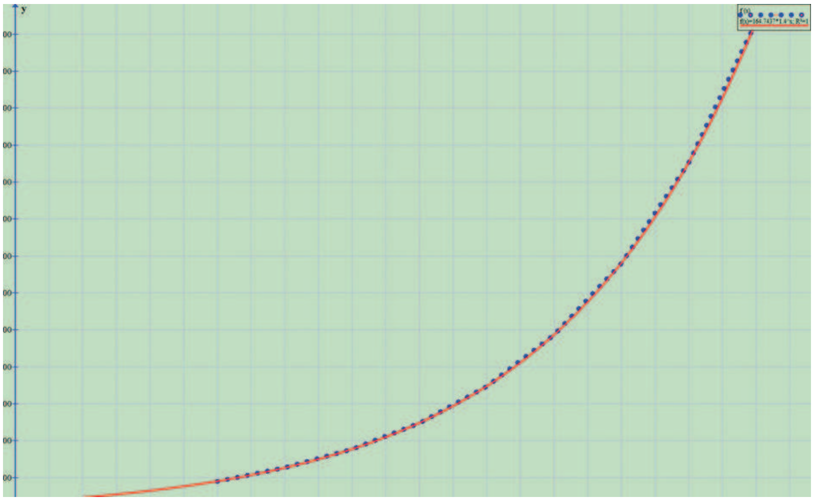
Iz podataka u tablici dobije se da je

$$k = \frac{452}{1.4^3} = 164.7.$$

Modelna funkcija je:

$$f(x) = 164.7 \cdot 1.4^x$$

Analitički dobivenu modelnu funkciju uspoređujemo s funkcijama koje nam za dane podatke izračunava program *Graph* (slika 6).



Slika 6. Modelna funkcija za rast stanica $f(x) = 164.7 \cdot 1.4^x$

c) Interpretacija rješenja

Pri prijenosu rješenja matematičkog problema u realni svijet potrebno je poštovati granice realnog svijeta i kritički vrednovati podatke, npr. poštovati da na dijeljenje stanica utječu i uvjeti u laboratoriju i sl. Rješenje sa stanovišta realne situacije može biti povezano s pitanjem: Koja je važnost matematičkog rješenja u smislu stvarnog razmnožavanja, odnosno dijeljenja stanica? Zaustavlja li se proces dijeljenja i kod kojih uvjeta?

Zaključak

S didaktičkog gledišta proces modeliranja znači **dublje promišljanje o matematičkom znanju**. Npr. kod modeliranja linearne veze između danih vrijednosti promišljamo o linearnoj funkciji, kod modeliranja eksponencijalne veze dublje promišljamo o eksponencijalnoj funkciji. Kod modeliranja oblikujemo pretpostavke, generaliziramo, interpretiramo i razvijamo kritički odnos prema vrednovanju rezultata. Pri interpretaciji naročito treba naglasiti da je često interpretacija rješenja sa stanovišta realne situacije vrlo zahtjevna, često zahtjevnija nego interpretacija sa stanovišta matematike.

Prijevod: Mateja Krušec

LITERATURA

1/ P. Legiša: *Matematika 2*, DZS, Ljubljana 2003., str. 174–175.

2/ S. Repolusk: *Primeri različnih pristopov pri matematičnem modeliranju*, u S. Kmetič (ur.), M. Sirnik (ur.), A. Žakelj: Matematika, Posodobitve pouka v gimnazijski praksi, (Posodobitve pouka v gimnazijski praksi). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, 2010., str. 81–89.

3/ A. Žakelj: *Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike*, u S. Kmetič (ur.), M. Sirnik (ur.): Matematika, Posodobitve pouka v gimnazijski praksi, (Posodobitve pouka v gimnazijski praksi), Zavod RS za šolstvo, Ljubljana 2010., str. 15–77.

4/ A. Žakelj, A. Prinčič Röhler, Z. Perat, A. Lipovec, V. Vršič, B. Repovž, J. Senekovič, Z. Bregar Umek: *Učni načrt, program osnovna šola, matematika*, Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo, Ljubljana 2011. `http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf`.