Neke posljedice

jedne važne trigonometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

U [1], str. 119, dokazana je važna trigonometrijska nejednakost koja glasi:

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}, \qquad (1)$$

gdje su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta ABC.

U (1) vrijedi jednakost ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut, tj. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. U tom dokazu se iz činjenice da je funkcija $f(x) = \sin x$; $x \in \langle 0, \pi\rangle$ zbog $f''(x) = -\sin x < 0$; $x \in \langle 0, \pi\rangle$ **konkavna**, koristi **Jensenova nejednakost**:

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3},$$

tj.

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\pi}{3},$$

odnosno (zbog $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma > 0$; $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi\rangle$):

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Sada ćemo dati nekoliko zanimljivih posljedica nejednakosti (1).

Posljedica 1. U trokutu ABC vrijedi nejednakost

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Dokaz. Očigledno za $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi\rangle$ vrijedi $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma > 0$ te $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > 0$.

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$\iff \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3,$$

a odavde zbog (1):

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \left(\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3}\right)^3,$$

tj.

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

U (2) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ (jednakostranični trokut). ■

Posljedica 2. U trokutu ABC vrijedi nejednakost

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}. \qquad (3)$$

Dokaz. Koristit ćemo poznatu nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine:

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2); \quad x, y, z \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Stavljajući u (4) da je $x = \sqrt{\sin\alpha}$, $y = \sqrt{\sin\beta}$ i $z = \sqrt{\sin\gamma}$, dobivamo:

$$\left(\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma}\right)^2 \leq 3\left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right),$$

tj.

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} \leq \sqrt{3(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)},$$

a odavde zbog (1):

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}},$$

odnosno

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

U (3) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ (jednakostranični trokut). ■

Posljedica 3. U trokutu ABC vrijedi nejednakost

$$a+b+c\le 3R\sqrt{3}, \tag{5}$$

gdje su a,b,c duljine stranica tog trokuta, a R je radijus opisane mu kružnice.

Dokaz. Na osnovu poučka o sinusima imamo $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$. Slijedi prema tome:

$$a+b+c=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

a odavde zbog (1):

$$a+b+c\le 3R\sqrt{3}.$$

U (5) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ (jednakostranični trokut). ■

Posljedica 4. U trokutu ABC vrijedi nejednakost

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{8}\sqrt{3}. \tag{6}$$

Dokaz. Koristit ćemo poznatu jednakost:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{7}$$

Sada iz (7) na osnovu nejednakosti (1) dobivamo

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

tj.

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

U (6) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ (jednakostranični trokut). ■

Posljedica 5. U trokutu ABC vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 2\sqrt{3}. \tag{8}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)\ge\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{1}{\sin\gamma}},$$

tj.

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}. \tag{9}$$

Iz (2) slijedi

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\ge\frac{8}{3\sqrt{3}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \tag{10}$$

Sada iz (9) i (10) dobivamo:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}},$$

tj.

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge 2\sqrt{3}.$$

U (8) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ (jednakostranični trokut). ■

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić: *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

2/ O. Bottema and oth.: *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.