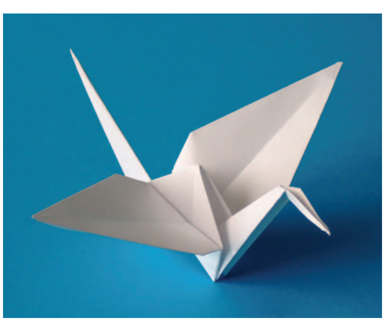
Matematika savijanja papira

Sandra Gračan, Zagreb

Jedan od zanimljivih načina da se u nastavu matematike ubaci element stvarnog matematičkog doživljaja jest savijanje papira ili **origami**.

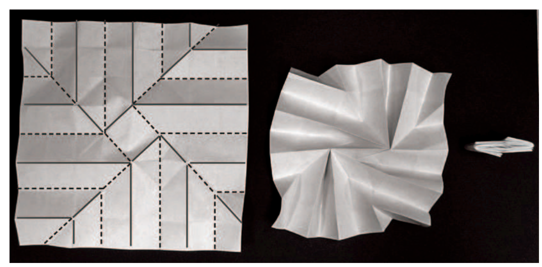
Origami (jap. 折り紙; oru = savijanje, kami = papir) tradicionalna je vještina kreiranja modela od papira. Najvjerojatnije je nastao izumom papira u Kini oko 2. stoljeća pr. Kr., a pravi procvat doživio je u Japanu gdje je postao prava nacionalna umjetnost. Osim u Japanu, ova se vještina pojavila i u drugim dijelovima svijeta, primjerice u Španjolskoj, pod imenom *papiroflexia*.

Danas postoje brojne origami tehnike. Primjerice, **tradicionalni origami** zahtijeva da se svi modeli rade isključivo od jednog komada papira kvadratnog oblika koji se ne smije rezati niti lijepiti.



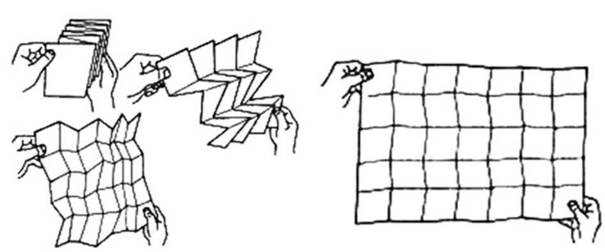
tradicionalni origami

Kruti origami (engl. *rigid origami*) tehnika je koja istražuje ideju savijanja jedne velike plohe u oblik manje plohe na takav način da se savijeni model u jednom potezu može razmotati u prvobitnu veliku plohu i obratno: da se velika ploha jednostavnim potezom savije po svojim pregibima i složi u manji presavijeni model. Savijanje plohe dozvoljeno je samo po zadanim pregibima, pa ova tehnika



kruti origami

može poslužiti za savijanje krutih, primjerice metalnih ploča na manje plohe. Tako su nedavno bile složene solarne ploče za japanski satelit — nakon presavijanja transportirane su u svemir gdje su se zatim u jednom potezu razmotale u punu širinu. Ovu metodu savijanja izumio je 2006. godine japanski astrofizičar Koryo Miura.



Miura-savijanje

Paralelogrami koji definiraju pregibe imaju kutove od 84° i 96°, a kako se savijaju, pogledajte na `http://en.wikipedia.org/wiki/Miura_fold#mediaviewer/File:Miura-ori.gif`.

A danas je najpoznatiji tzv. **modularni origami**. Tom se tehnikom izrađuje čitav niz pojedinih dijelova koji se zatim bez lijepljenja spajaju da bi oblikovali veći i složeniji model. Jedan takav model pogledajte na donjoj slici.

modularni origami

Matematika u origamiju

U kakvoj su vezi origami i matematika? Naravno, prva asocijacija je **geometrija** — svima je intuitivno jasno da te dvije toliko stare discipline povezuju brojni geometrijski pojmovi. Pa ipak, matematičari se ozbiljno bave origamijem tek odnedavno.

Povijest

1893. g. indijac Tandalam Sundara Rao objavio je knjigu pod naslovom *Geometrijske vježbe u savijanju papira*. U knjizi navodi prve dokaze nekih geometrijskih konstrukcija savijanjem papira, bavi se približnom trisekcijom kuta i zaključuje da konstrukcija dužine duljine kubnog korijena nekog broja nije moguća.

1936. godine talijanska matematičarka Margharita P. Beloch dokazala je da se savijanjem papira na određeni način može riješiti opća kubna jednadžba. 1949. godine američki matematičar R. C. Yeates u knjizi *Geometrijske metode* opisuje tri dozvoljene konstrukcije koje odgovaraju današnjem prvom, drugom i petom od sedam Huzita-Hatorinih aksioma.

Od 1960-ih naovamo matematičari su otkrili razne načine uporabe origamija pri objašnjavanju brojnih matematičkih problema. Uz pitanje može li se neki ravni lik saviti na što manju dimenziju tako da se ne ošteti, zanima ih primjerice je li moguće rješavati neke algebarske jednadžbe origami tehnikom. Trisekcija kuta i duplikacija kocke, dva poznata geometrijska problema koja su nerješiva klasičnom konstrukcijom s pomoću ravnala i šestara, rješivi su tehnikom origamija.

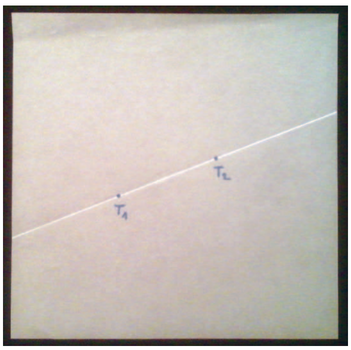
Kao rezultat proučavanja origamija kroz primjene geometrijskih pravila, znamo kako se kvadrat može saviti na trećine, sedmine, devetine..., a brojni teoremi opisuju kako se od kvadrata mogu savijanjem dobiti neki drugi likovi: jednakostranični trokuti, peterokuti i šesterokuti, pa čak i pravilan 19-erokut, zlatni ili srebrni pravokutnik, itd.

Origami je ubrzo prerastao u pravu znanstvenu disciplinu pa je 1989. godine u talijanskom gradu Ferrari održan prvi međunarodni susret origami znanosti i tehnologije (*International Meeting of Origami Science and Technology*), skup koji se od tada održava svake 4. godine i koji je danas poznat kao Međunarodna konferencija o origamiju u znanosti, matematici i obrazovanju (*International Conference on Origami in Science, Math, and Education*).

Aksiomi

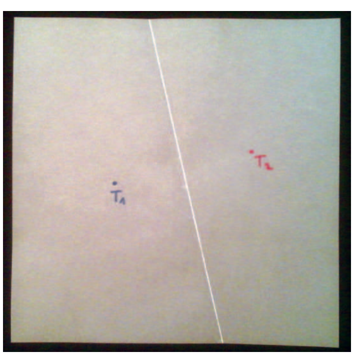
Pa, zavirimo na trenutak u "origami-matematiku", barem u onu jednostavniju. Možda vas je, poput mene, iznenadila činjenica da origami ima svoj vlastiti skup temeljnih pretpostavki, odnosno da se postupak savijanja papira temelji na sedam Huzita-Hatorinih aksioma. Oni opisuju što se može konstruirati savijanjem pregiba koji nastaju preklapanjem najviše dviju točaka ili dvaju pravaca. Ove aksiome prvi je otkrio Francuz Jacques Justin 1989. godine, ali im se nije pridavalo neko ozbiljnije značenje, sve dok prvih 6 aksioma nije ponovno objavljeno, 1991. godine, na Prvoj međunarodnoj konferenciji o origamiju u obrazovanju i terapiji (*The First International Conference on Origami in Education and Therapy*). Posljednji, Aksiom 7, postavio je Koshiro Hatori 2001. godine. Evo ih redom.

Aksiom 1. Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2, moguće je saviti jedinstven pregib koji prolazi tim točkama.



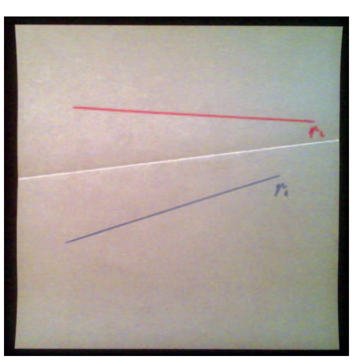
prvi Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 2. Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2, moguće je saviti jedinstven pregib tako da točka T_1 padne na točku T_2.



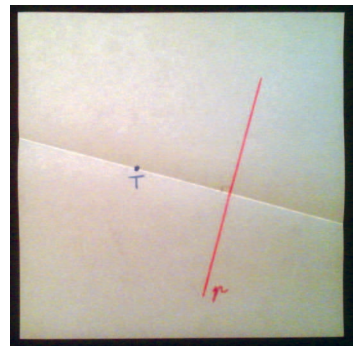
drugi Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 3. Ako su zadana dva pravca p_1 i p_2, moguće je saviti pregib tako da pravac p_1 padne na pravac p_2.



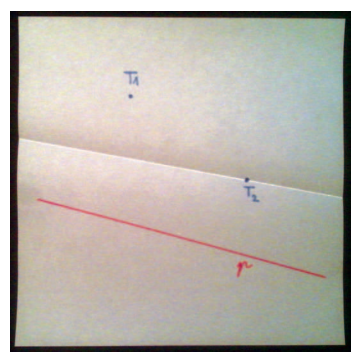
treći Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 4. Ako je zadana točka T i pravac p, moguće je saviti jedinstven pregib okomit na p koji prolazi točkom T.



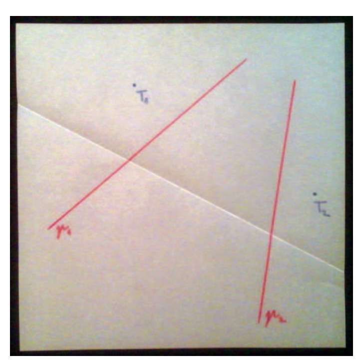
četvrti Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 5. Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2, te pravac p, moguće je saviti pregib koji će točku T_1 smjestiti na pravac p i prolaziti točkom T_2.



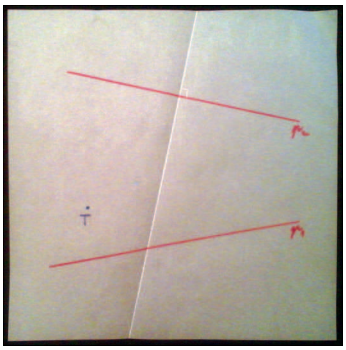
peti Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 6. Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2 i dva pravca p_1 i p_2, moguće je saviti pregib koji će točku T_1 smjestiti na p_1, a T_2 na p_2.



šesti Huzita-Hatorin aksiom

Aksiom 7. Ako je zadana točka T i dva pravca p_1 i p_2, moguće je saviti pregib koji će točku T smjestiti na p_1 i biti okomit na p_2.



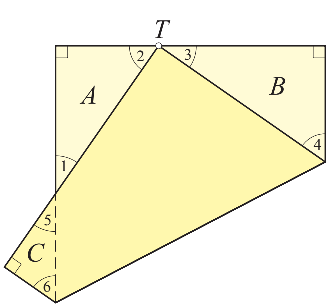
sedmi Huzita-Hatorin aksiom

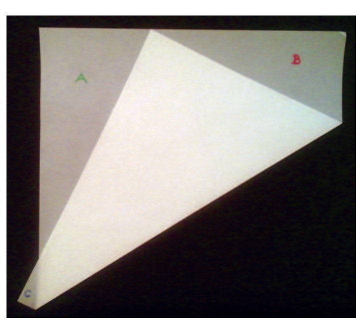
Teoremi

Na temelju ovih aksioma gradi se prava matematička struktura: iskazuju se i dokazuju jednostavniji teoremi i složenije tvrdnje te se izvode origami-konstrukcije kojima se rješavaju razni geometrijski problemi, kao što su primjerice dijeljenje dužine na jednake dijelove ili konstrukcija kuta od $60°$ — tehnike koje se koriste pri izradi gotovo svakog origami modela. Osim toga, prihvatimo li navedene aksiome, sve ravninske euklidske konstrukcije možemo izvesti isključivo savijanjem papira.

Promotrimo, primjerice, sljedeći poučak:

Hagin poučak. Odaberemo li na kvadratnom listu papira točku T tako da leži na gornjoj stranici kvadrata i savijemo papir tako da donji vrh kvadrata padne u točku P, možemo uočiti tri slična trokuta: $\triangle A$, $\triangle B$ i $\triangle C$ (vidi sliku).





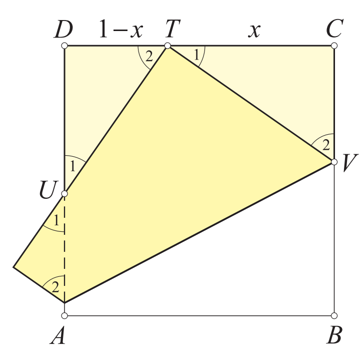
Hagin poučak

Ovaj poučak nije teško dokazati, jer se sa slike vidi da je $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90°$, $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 90°$, te $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 90°$. Slijedi da je $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$, odnosno da su trokuti $\triangle A$ i $\triangle B$ slični. Lako se pokazuje i da je $\triangle A \sim \triangle C$, pa vrijedi

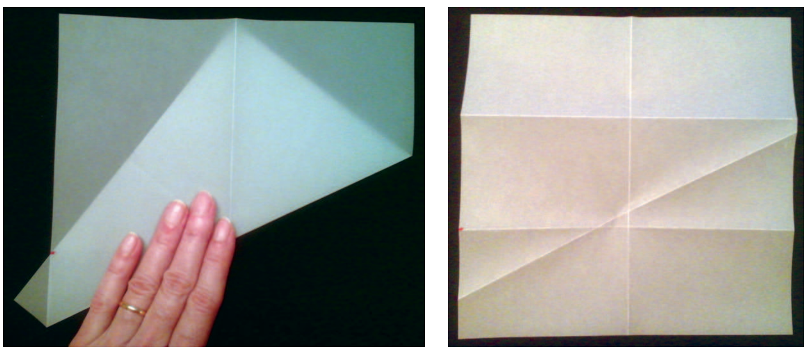
$$\triangle A \sim \triangle B \sim \triangle C.$$

Zahvaljujući ovom poučku, moguće je stranicu kvadrata duljine 1 podijeliti točkom T na dva dijela koji predstavljaju bilo koji pravi razlomak, posebice onaj s neparnim brojem u nazivniku. Ako sa x označimo duljinu dužine $\overline{TC}$, onda su duljine ostalih dužina prikazanih na slici racionalne funkcije od x (vidi tablicu). $|DU| = \dfrac{2|TC|}{1+|TC|}$. Duljina $|UD|$ je racionalan broj ako i samo ako je racionalan $|TC|$.

Hagin prvi poučak				
$\|TC\|$	$\|DU\|$	$\|UA\|$	$\|CV\|$	$\|TU\|$
x	$\frac{2x}{1+x}$	$\frac{1-x}{1+x}$	$\frac{1-x^2}{2}$	$\frac{1+x^2}{1+x}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{15}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{13}{15}$



Odaberemo li za točku T polovište dužine $\overline{CD}$, odredili smo da je $x = \frac{1}{2}$, slijedi $|DU| = \frac{2}{3}$, pa smo kao poseban slučaj Hagina poučka dobili postupak savijanja kojim se neka dužina može podijeliti na **tri jednaka dijela**: papir kvadratnog oblika (kojemu brid predstavlja zadanu dužinu) presavijemo okomito na pola, pa razmotamo. Zatim ga presavijemo tako da vrh B kvadrata padne u polovište P brida $\overline{CD}$. Nakon savijanja će se bridovi $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ sjeći u točki U koja brid $\overline{AD}$ dijeli u omjeru $1:2$.



Dijeljenje dužine na tri jednaka dijela

$\frac{1}{5}$ se, primjerice, može dobiti svega trima savijanjima: najprije raspolovite stranicu kvadrata savijanjem na pola, a zatim dvaput primijenite Hagin poučak.

Primjena origamija u nastavi matematike

Origami se može primijeniti u nastavi matematike za vizualizaciju brojnih geometrijskih pojmova. Origamijem u matematici možete prikazati pravce koji se sijeku, okomitost, paralelnost, dužinu, polovište dužine, kut, simetralu kuta, trokut, težište trokuta, konveksne poligone, pravilne poligone, presijecanje ravnina, trodimenzionalnu geometriju, Platonova tijela i druge poliedre, sukladnost i sličnost, površine i volumene... Osim toga, možete dokazivati i neke poznate poučke, poput Pitagorina poučka, poučka o zbroju kutova u trokutu, Talesova poučka itd.

Prednosti origamija su brojne. Prije svega, sve što vam treba su olovka, ravnalo, škare i, naravno, papir. Može se koristiti bilo kakav papir, ali proziran paus ili neki drugi voštani papir ima malu prednost: pregibi su jasne, svjetlije linije, a prozirnost olakšava učenicima da "vide" kako se neke točke i pravci međusobno poklapaju. Zadatci i vježbe koje možete izvoditi s pomoću savijanja papira kreću od osnovnih geometrijskih pojmova i jednostavnih savijanja koji su pogodni za rad s osnovnoškolskom djecom, do složenijih matematičkih objekata, poput čunjosječnica ili izvođenja nekih dokaza, koji se mogu zadavati srednjoškolcima.

Savijanje papira većini učenika može biti vrlo zabavno i potiče pozitivne emocije, a pritom ih navodi na usvajanje novih matematičkih pojmova, na uočavaje novih odnosa u prostoru ili ravnini te na donošenje ispravnih zaključaka o brojnim geometrijskim odnosima. Za savijanje papira učenici koriste vlastite ruke i prateći određeni niz koraka dobivaju zorne rezultate. Da bi rezultati bili uspješni, koraci se moraju provesti na točno opisan način, čime se razvija spretnost i preciznost u radu.

Izrađivanje origami modela prikladno je za rad u grupama pa ćete uz timski rad ostvariti i socijalizaciju među učenicima. Origami može biti i jednostavan i zoran uvod i dobra prethodnica učenju geometrije s pomoću računala, upotrebom nekog od softvera dinamične geometrije.

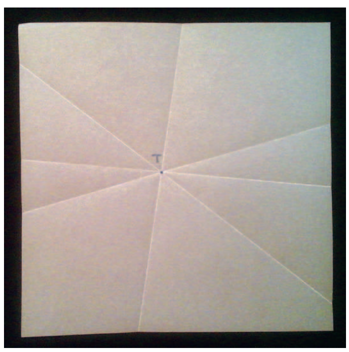
Iako će mnogi od vas origami svrstati pod zabavnu matematiku, za njegovu primjenu u nastavi matematike treba se ozbiljno i metodički pripremiti. Prije svega, potrebno je definirati osnovne pojmove i učenicima dati jasne upute. Korisno je te upute i crteže unaprijed pripremiti da biste ih mogli podijeliti učenicima u razredu. Savijanja isprobajte i sami, jer se može dogoditi da neki elementi nakon savijanja "ispadnu" s papira.

Osnovna savijanja

Savijemo li komad papira, načinili smo **pregib** jer nakon što izravnamo papir, na njemu ostaje nabor u obliku ravne linije – pravca. O pregibima možemo govoriti kao o **pravcima**.

1. Pravac koji prolazi zadanom točkom

Označimo li na papiru neku točku T, savijanjem možemo načiniti pregib koji prolazi tom točkom. Odredili smo pravac koji prolazi tom točkom. A možemo načiniti i čitav **snop pravaca**.



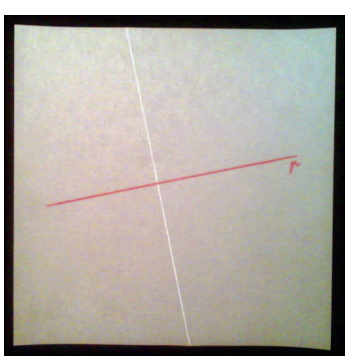
snop pravaca

2. Pravac koji prolazi dvjema zadanim točkama

Označimo li na papiru dvije točke, A i B, papir možemo presaviti tako da dobiveni pregib prolazi tim dvjema točkama (vidi prvi Huzita-Hatorin aksiom).

3. Okomica na zadani pravac

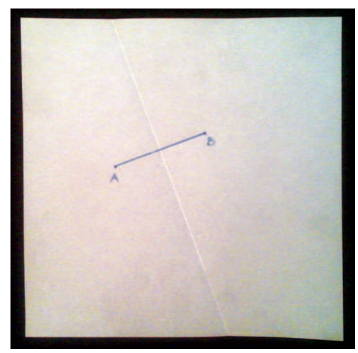
Papir savijemo tako da se lijevi dio zadanog pravca preklopi na desni dio. Tako dobiveni pregib predstavlja **okomicu** na zadani pravac. Pregib se može načiniti i tako da dobivena okomica prolazi nekom zadanom točkom T na zadanom pravcu ili izvan njega (vidi četvrti Huzita-Hatorin aksiom). Napomenimo da smo time načinili i **pravi kut**.



okomica

4. Simetrala dužine

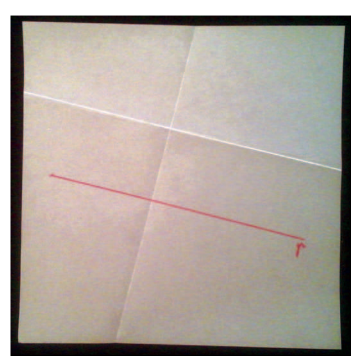
Nacrtajmo na papiru dužinu $\overline{AB}$ i presavijmo papir tako tako da se točke A i B poklope. Načinili smo pregib koji predstavlja pravac jednako udaljen od točaka A i B, o čemu govori drugi Huzita-Hatorin aksiom. Točke A i B su međusobno osno-simetrične s obzirom na pregib i zapravo smo odredili **simetralu dužine** $\overline{AB}$, a time i **polovište dužine** $\overline{AB}$.



simetrala dužine

5. Paralela

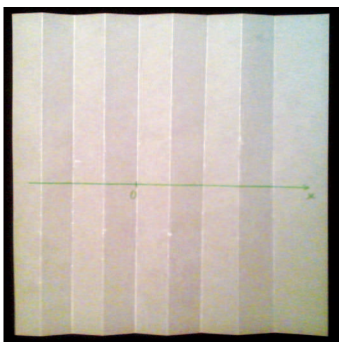
Pravac paralelan zadanom pravcu savit ćemo tako da najprije savijemo okomicu, a zatim okomicu na tu okomicu. Isto se može načiniti uz dodatni zahtjev da paralela prolazi nekom zadanom točkom. Najprije se savije okomica na zadani pravac koja prolazi tom točkom.



paralela

6. Označavanje brojevnog pravca

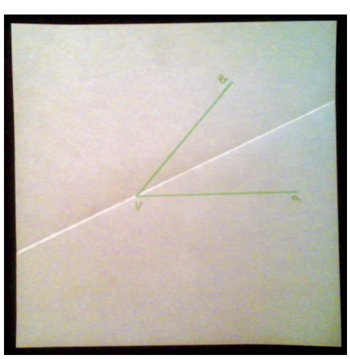
Određivanje jednako razmaknutih točaka na zadanom pravcu odgovara označavanju cijelih brojeva na brojevnom pravcu. Savijanjem prve okomice na pravac negdje u blizini ruba papira odredili smo odgovarajuću duljinu jedinične dužine, a zatim se uzastopnim savijanjem niza međusobno paralelnih pregiba zadani pravac podijeli na dijelove jednake duljine.



brojevni pravac

7. Simetrala kuta

Nacrtamo li na papiru kut aVb, taj se kut savijanjem papira vrlo jednostavno može raspoloviti: papir treba saviti tako da jedan krak kuta padne na drugi. Time smo načinili pregib koji predstavlja **simetralu kuta** (vidi treći Huzita-Hatorin aksiom).



simetrala kuta

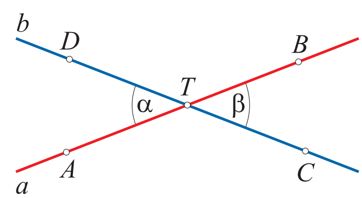
Napomenimo da nizom ciljanih pitanja možete potaknuti učenike da sami izvedu ova početna savijanja i da ove ili slične zaključke donose sami. *Kako biste savijanjem načinili okomicu? Kako biste našli polovište dužine? A simetralu kuta? Uz pomoć ravnala nije teško saviti pregib paralelan zadanom pregibu... a što ako ne smijete upotrijebiti ravnalo?*

Kako ćete odrediti pravac koji je jednako udaljen od dvaju zadanih međusobno paralelnih pravaca? A što ako okomica (ili paralela) treba prolaziti još i nekom zadanom točkom?

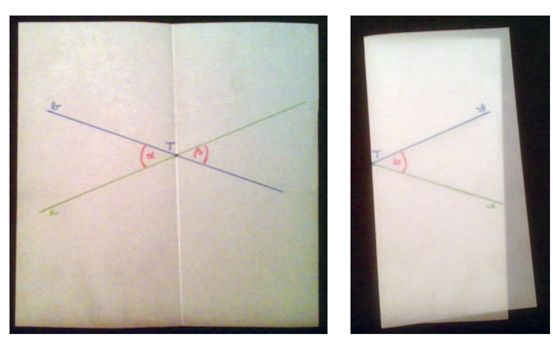
8. Vršni kutovi

I u origami-geometriji važni su dokazi. Primjerice, evo kako bismo dokazali da su **vršni kutovi sukladni**, formalno i savijanjem papira.

Savijanjem načinite dva pravca, a i b, koji se sijeku u točki T. Označimo li na pravcima točke A, B, C i D kao na slici, te veličine dvaju šiljastih kutova redom s α i β, vrijedi: $\sphericalangle ATC = 180° - \alpha$ (jer točke C, T i D leže na pravcu) i $\sphericalangle ATC = 180° - \beta$ (jer točke A, T i B leže na pravcu). Iz $180° - \alpha = 180° - \beta$ slijedi da je $\alpha = \beta$.



Kao alternativa, origami-dokaz vrlo je jednostavan, brz i uvjerljiv: papir presavijemo tako da se kut α i kut β međusobno poklope i tvrdnja je očigledna. Pregib dobiven ovakvim savijanjem bit će simetrala kutova $\sphericalangle ATC$ i $\sphericalangle BTD$.



Vršni kutovi

Nakon usvajanja osnovnih ideja i pojmova, nije teško napraviti korak dalje ka malo složenijim zadatcima i obraditi razne geometrijske likove i njihova svojstva. U sljedećem broju MiŠa slijedi nastavak s nizom primjera i zadataka.