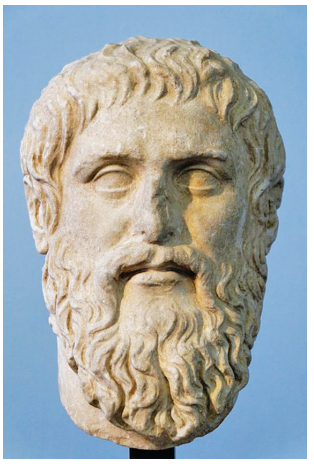
Tko je prvi...
dokazao da postoji točno pet pravilnih poliedara?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb



Slika 1. Kopija Silanionova mramornog porteta Platona (fotografija: ©Marie-Lan Nguyen / Wikimedia Commons)

Pravilni su poliedri danas poznati pod nazivom Platonova tijela. To su pravilni tetraedar, heksaedar[1], oktaedar, dodekaedar i ikozaedar. S obzirom na popularni naziv, mnogi će pomisliti da je veliki antički filozof Platon (427. – 347. pr. Kr.) prvi koji je dokazao da ih ima pet, no tome nije tako...

Najstariji tragovi ljudskog bavljenja pravilnim poliedrima potječu još iz doba megalitskih kultura (Europa, otprilike 4500. – 2000. pr. Kr.). Arheološki nalazi iz tog doba uključuju ne samo modele kocaka, već i pravilnih tetraedara, oktaedara i dodekaedara. Posljednje je posebno zanimljivo jer se pravilni dodekaedri ne pojavljuju u (makroskopskoj) prirodi, dok neki kristali mogu izrasti u oblike kocaka te pravilnih tetraedara i oktaedara.

Slika 2. Kristali kubičnog sustava mogu poprimiti oblike pravilnog tetraedra (sfalerit, fotografija: ©Rob Lavinsky / Wikimedia Commons), heksaedra (pirit, fotografija ©Carles Millan / Wikimedia Commons) ili oktaedra (magnetit, ©Rob Lavinsky / Wikimedia Commons). Kristali ne mogu izrasti u obliku pravilnog dodekaedra ni ikozaedra.

Iz otprilike istog doba potječu i najraniji primjeri igraćih kocaka (treće tisućljeće pr. Kr., područja današnjeg Irana, Iraka i Indije). Većina njih su, kao i danas, oblika kocke, no posebno je zanimljiva igra iz sumerskog grada Ura iz otprilike 2600. pr. Kr. u kojoj su se koristile "kocke" oblika pravilnog tetraedra – najstariji poznati prethodnici današnjih "kockica" za razne vrste društvenih igara.

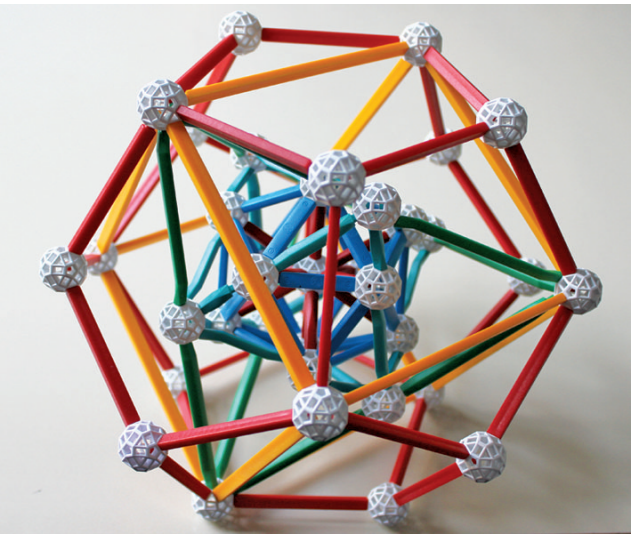
Slika 3. Igraće kocke za *fantasy* društvene igre u oblicima pet Platonovih tijela (fotografija: ©FMB)

[1] Pravilni heksaedar obično nazivamo kockom.

Prvi koji su se sustavno bavili pravilnim poliedrima (kao što su uostalom i prvi koji su se sustavno bavili matematikom) bili su antički Grci. Konkretno, pitagorejci – kojima se pripisuje stvaranje matematike kao apstraktne znanosti u kojoj se tvrdnje dokazuju – su oko 500. g. pr. Kr. zasigurno poznavali i znali opisati tri ili četiri od pet pravilnih poliedara (sve osim ikozaedra i možda oktaedra, no neki povjesničari misle da su poznavali i oktaedar). Vezana uz pravilan dodekedar je poznata anegdota o smrti pitagorejca Hipasusa s Metaponta, koji je navodno poginuo na moru, što mu je bila kazna za objavljivanje i nepripisivanje otkrića pravilnog dodekaedra Pitagori. Čini se i da su pitagorejci bili svjesni da se pravilnim poliedrima može opisati sfera, no nema tragova o njihovu poznavanju dokaza da ih je samo pet. Neki izvori čak ne spominju pitagorejsko poznavanje pravilnog tetraedra kao pravilnog poliedra, a većina smatra da su pravilni oktaedar doživljavali izdvojeno, kao dvostruku kvadratnu piramidu. Zato se uglavnom smatra da su pitagorejci poznavali kocku, pravilni tetraedar i dodekaedar i neka njihova osnovna svojstva.

Čitatelji s malo "jačim" temeljima u povijesti filozofije sjetit će se da su Platonova tijela dobila ime po Platonu jer ih je on opisao u svome dijalogu "Timej" (i tu ih redom povezao s četiri klasična "elementa": zemljom, zrakom, vodom i vatrom, te peto – pravilni dodekaedar – pomalo difuzno sa svemirom). Timeja smatramo filozofom pitagorejske škole u 5. st. pr. Kr., no nije sigurno da se uopće radi o povijesnoj ličnosti. Čak i ako je postojao, niti on niti Platon – prema sadašnjim povijesnim saznanjima – nisu autori prvog dokaza o postojanju točno pet pravilnih poliedara.

No, Platon je napisao još jedan za povijest matematike značajan dijalog: "Teetet". Nazvan je po atenskom matematičaru Teetetu (živio je otprilike 417. – 369. pr. Kr.), koji je ujedno glavni lik još jednog Platonova dijaloga ("Sofist"). Povjesničari upravo njemu pripisuju otkriće pravilnog oktaedra i ikozaedra te dokaz o postojanju točno pet pravilnih poliedara. Smatra se da su Teetetovi rezultati temelj trinaeste knjige najznačajnijeg matematičkog djela (ne samo) staroga vijeka, Euklidovih "Elemenata" (oko 300. pr. Kr.). U toj se knjizi mogu naći najstariji poznati objavljeni dokazi svih osnovnih geometrijskih svojstava pravilnih poliedara, uključujući



Slika 4. Bridni modeli Platonovih tijela izrađeni s pomoću Zometool elemenata, složeni po uzoru na Keplerov model Sunčeva sustava – ikozaedar u oktaedru u tetraedru u kocki u dodekaedru (fotografija: ©FMB)

činjenicu da ih je točno pet – najverojatnije upravo Teetetov dokaz.

S obzirom na jednostavnost, ovdje ćemo opisati taj dokaz suvremenim matematičkim rječnikom. Kao prvo, uočimo da se pri svakom vrhu pravilnog poliedra sastaje jednaki broj sukladnih pravilnih mnogokuta. Kako se radi o prostornom kutu, mora ih biti bar po tri, a zbroj kutova tih mnogokuta oko promatranog vrha mora biti manji od punog kuta. Unutrašnji kutovi pravilnih mnogokuta redom su veličina $60°$ (istostranični trokut), $90°$ (kvadrat), $108°$ (pravilni peterokut) i $120°$ (pravilni šesterokut). Zbog navedenog ograničenja ne postoji pravilni poliedar omeđen mnogokutima s više od šest strana (ako bismo imali više od dva takva pri jednom vrhu, zbroj kutova bi bio veći od punog kuta). Istostraničnih trokuta možemo uzeti tri, četiri ili čak pet tako da zadovoljavaju uvjet i tako dobivamo pravilni tetraedar, oktaedar i dodekaedar. Kvadrata, kao i pravilnih peterokuta, možemo uzeti samo po tri oko svakog vrha i tako dobijemo kocku, odnosno pravilni dodekaedar. Kako su sva navedena tijela stvarno i moguća (vizualno očito, a pravi dokaz je relativno zahtjevan), zaključujemo da postoji samo pet Platonovih tijela.