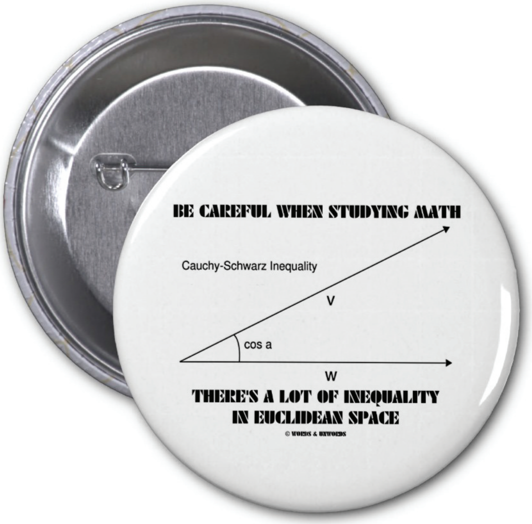
Primjena Bernoullijeve nejednakosti

za rješavanje nekih iracionalnih jednadžbi

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH



Švicarska obitelj Bernoulli je jedinstven fenomen u svijetu – čak dvanaest članova ove obitelji bavilo se matematikom, fizikom i kemijom. Kada je u pitanju matematika, najveći doprinos ovoj znanosti dali su Jacob (1654. – 1705.), njegov brat Johann (1667. – 1748.) kao i Johannov sin Daniel (1700. – 1782.). Prva dvojica su obilno zadužila matematiku, dok je Daniel najveći doprinos dao u fizici (hidrodinamici). Jacob je dao značajne rezultate u teoriji vjerojatnosti, napisao je djelo *Ars conjectandi* (*The art of Conjecture*). Ta knjiga mu je izdana posthumno 1713. godine. U njoj se nalaze dijelovi koji se odnose na Bernoullijeve brojeve i Bernoullijev teorem. Njemu se pripisuje i poznata **Bernoullijeva nejednakost** (izrečena i dokazana 1689. godine) koja ima veliku primjenu u raznim područjima matematike. Najprije ćemo iskazati ovu nejednakost u njezinom najpoznatijem obliku koji glasi:

Ako je $x > -1$ i ako je n prirodan broj, tada je

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Ova nejednakost se lako dokaže uz pomoć matematičke indukcije.

Dvije generalizacije ove nejednakosti dane su sljedećim teoremom.

Teorem. Neka je $x \geq -1$ i $0 < a < 1$ $(x, a \in \mathbf{R})$. Tada je

$$(1+x)^a \leq 1+ax. \tag{1}$$

Ako je $x \geq -1$ i $a < 0$ ili $a > 1$ $(x, a \in \mathbf{R})$, tada je

$$(1+x)^a \geq 1+ax. \tag{2}$$

Znak jednakosti u (1) i (2) vrijedi samo u slučaju kada je $x = 0$.

Dokazi ovih nejednakosti su nešto složeniji; prvo su dani u slučaju kada je a racionalan broj, a zatim kada je a iracionalan broj.

Dokaz. Neka je a pozitivan pravi razlomak. Ako je $a = \frac{m}{n}$, gdje su m i n cijeli pozitivni brojevi i pritom je $1 \leq m < n$, tada iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine $(A \geq G)$ n pozitivnih brojeva slijedi:

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\ &= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-m}} \\ &\overset{(G\leq A)}{\leq} \frac{(1+x)+(1+x)+\ldots+(1+x)+1+1+\ldots+1}{n} \\ &= \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1+\frac{m}{n}x \\ &= 1+ax,\end{aligned}$$

tj.

$$(1+x)^a \leq 1+ax.$$

Znak jednakosti vrijedi ako su pribrojnici u nejednakosti $A \geq G$ jednaki, odnosno ako je $1+x=1$, tj. $x=0$. Za $x \neq 0$ vrijedi

$$(1+x)^a < 1+ax.$$

Ovime je dokazana nejednakost (1) u slučaju kada je a, $(0 < a < 1)$ racionalan broj.

Neka je sada a iracionalan broj $(0 < a < 1)$. Neka je $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ jedan niz pravih razlomaka čija je granična vrijednost a. Iz nejednakosti

$$(1+x)^{r_n} \leq 1+r_nx; \quad x \geq -1, \ n = 1,2,3,\ldots$$

koju smo gore dokazali (u slučaju kada je eksponent racionalan broj), slijedi

$$(1+x)^a = \lim_{r_n\to a}(1+x)^{r_n} \leq \lim_{r_n\to a}(1+r_nx) = 1+ax.$$

Ovime je nejednakost (1) također dokazana za iracionalne vrijednosti a. Preostaje nam još dokazati da za $x \neq 0$ i $0 < a < 1$ vrijedi

$$(1+x)^a < 1+ax,$$

tj. da za $x \neq 0$ u (1) ne vrijedi znak jednakosti.

U svrhu ovog dokaza izaberimo jedan racionalan broj r takav da je $a < r < 1$. Očigledno vrijedi

$$(1+x)^a = \left[(1+x)^{\frac{a}{r}}\right]^r.$$

Zbog $0 < \frac{a}{r} < 1$, upravo smo ranije dokazali da vrijedi

$$(1+x)^{\frac{a}{r}} \leq 1+\frac{a}{r}x.$$

Očigledno slijedi da je

$$(1+x)^a \leq \left(1+\frac{a}{r}x\right)^r.$$

Za $x \neq 0$ je $\left(1+\frac{a}{r}x\right)^r < 1+r\cdot\frac{a}{r}x = 1+ax$, tj.

$$(1+x)^a < 1+ax.$$

Ovime je nejednakost (1) u potpunosti dokazana. Prijeđimo sada na dokaz nejednakosti (2). Neka je $a > 1$. Ako je $1+ax < 0$ (to je moguće, npr. ako je $a = 4$, $x = -\frac{1}{2}$, tada je $1+ax = 1+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$), tada je nejednakost (2) točna jer je onda njezina lijeva strana pozitivna, a desna je negativna.

Neka je $1+ax \geq 0$, tj. $ax \geq -1$. Tada iz nejednakosti (1) slijedi:

$$(1+ax)^{\frac{1}{a}} \leq 1+\frac{1}{a}\cdot ax = 1+x,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti samo u slučaju kada je $x=0$.

Potenciramo li obje strane gornje nejednakosti s a, dobijemo

$$1+ax \leq (1+x)^a.$$

Neka je sada $a < 0$ i $1+ax < 0$. Tada nejednakost (2) očigledno vrijedi. Ako je $1+ax \geq 0$, izaberimo jedan cijeli pozitivan broj n tako da je $-\frac{a}{n} < 1$. Iz nejednakosti (1) vrijedi

$$(1+x)^{-\frac{a}{n}} \leq 1-\frac{a}{n}x,$$

a odavde

$$(1+x)^{\frac{a}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{a}{n}x} \geq 1+\frac{a}{n}x$$

(posljednja nejednakost je točna zbog $1 \geq 1-\frac{a^2}{n^2}x^2$). Potenciranjem posljednje nejednakosti s n dobijemo

$$(1+x)^a \geq \left(1+\frac{a}{n}x\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{a}{n}x = 1+ax,$$

a ovo je nejednakost (2). ■

Rješavanje iracionalnih jednadžbi učenicima je često zanimljiv posao. Najčešće se sastoji u tome da se oslobodimo korijena i pokušamo jednadžbu svesti na algebarsku jednadžbu koja se lakše rješava. No, to je često veoma teško i mukotrpno. U [3] smo pokazali kako se razne iracionalne jednadžbe veoma uspješno rješavaju uz pomoć nejednakosti između sredina (harmonijske (H), geometrijske (G), aritmetičke (A) i kvadratne (K)) koja glasi

$$H \leq G \leq A \leq K.$$

Pokazat ćemo sada kako se slične iracionalne jednadžbe mogu veoma lako riješiti koristeći se Bernoullijevim nejednakostima (1) i (2).

Primjer 1. Riješite jednadžbu

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4. \tag{3}$$

Rješenje. Na prvi pogled ova iracionalna jednadžba djeluje "zastrašujuće". Pokušati osloboditi se korijena djeluje obeshrabrujuće. Vrlo vjerojatno bi to bio Sizifov posao. Primijetimo da je $x=0$ jedno rješenje dane jednadžbe (3). Je li to jedino rješenje? Uočimo da ova jednadžba ima smisla ako je $1-x \geq 0$, $1+x \geq 0$, $1-x^2 \geq 0$, tj. za $x \in [-1,1]$. Sada s pomoću Bernoullijeve nejednakosti (1) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{1}{4}}+(1+x^2)^{\frac{1}{4}}\\
&\quad\leq 1-\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{4}+1+\frac{x^2}{4}=4.
\end{aligned}$$

U Bernoullijevoj nejednakosti (1) vrijedi jednakost samo u slučaju kada je $x=0$. Sada neposrednom provjerom utvrdimo da je $x=0$ zaista rješenje dane jednadžbe (3).

Primjer 2. Riješite jednadžbu

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6. \tag{4}$$

Rješenje. Jednadžba je definirana, tj. ima smisla ako je $1-\frac{x}{3} \geq 0$ i $1+x \geq 0$, odnosno za $x \in [-1,3]$. Primjenom Bernoullijevih nejednakosti (1) i (2) dobivamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}&=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{6}}\\
&\leq 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2,
\end{aligned}$$

te

$$\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6 \geq 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2.$$

Lijeva i desna strana jednadžbe (4) jednake su samo u slučaju kada u (1) i (2) vrijedi jednakost, tj. za $x=0$. Dakle, $x=0$ je rješenje dane jednadžbe (4) što lako utvrdimo direktnom provjerom.

Naravno, ovdje se radilo o takvim iracionalnim jednadžbama na koje su se mogle primijeniti Bernoullijeve nejednakosti (1) i (2).

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić: *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

2/ Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

3/ Š. Arslanagić: *Rješavanje jednadžbi pomoću poznatih nejednakosti*, Poučak (Zagreb), God. 15, Broj 59, Listopad 2014.