Kategorije znanja u matematici

Željka Dijanić, Čazma
Alena Dika, Rijeka
i Tanja Debelec, Čakovec

Nastavnici matematike u svom radu s učenicima svakodnevno nailaze na različite situacije u kojima učenici pokazuju svoje izvrsno, osrednje ili manjkavo poznavanje matematičkih sadržaja što naročito dolazi do izražaja kada su za usvajanje novih pojmova i zakonitosti potrebna određena predznanja iz prethodnih razreda. Također uočavaju različitosti među učenicima. Neki od njih matematiku uče brzo i lako te bez puno truda postižu jako dobre rezultate, drugi se trude, puno rade i vježbaju, ali uz najbolju volju vrlo rijetko dobivaju visoke ocjene, treći tek uz jako puno vježbe postižu visoke ocjene, četvrti su jako spretni u otkrivanju novih zakonitosti na satu, ali ne vježbaju kod kuće pa imaju slabije ocjene, peti... Jedan od razloga zašto je tome tako jest kategorija znanja koju je pojedini učenik usvojio. Stoga ćemo u ovome radu prikazati pregled osnovnih kategorizacija znanja u matematici.

Što je znanje?

Prema Poljaku (1985.) znanje se definira kao "*sistem ili logički pregled činjenica i generalizacija o objektivnoj stvarnosti koje je čovjek usvojio i trajno zadržao u svojoj svijesti*". Činjenice su "*konkretnosti, odnosno pojedinosti o objektivnoj stvarnosti koje čovjek upoznaje perceptivnim putem*". Generalizacije ili apstrakcije su "*pojmovi, pravila, principi, metode, zakoni, definicije, zaključci, dokazi, kategorije, aksiomi, postulati, izvodi, norme, postavke, hipoteze, anticipacije, teorije, misli, ideje, sistemi, simboli, algoritmi, formule, jednadžbe, vrijednosti itd.*" koje treba shvatiti posredstvom mišljenja. S obzirom na kvalitetu on razlikuje više stupnjeva znanja: znanje prisjećanja, znanje prepoznavanja, znanje reprodukcije, operativno znanje i stvaralačko znanje.

Prema Bloomu (1956.) znanje se definira kao "*nešto malo više od prisjećanja ideje ili fenomena u obliku vrlo bliskom onome na koji je čovjek izvorno bio naišao*". Bloom razlikuje dvije kategorije – znanje te intelektualne vještine i sposobnosti. U kategoriju znanja svrstava znanje specifičnih činjenica, znanje o načinu tretiranja specifičnih činjenica te univerzalno i apstraktno znanje, a kategoriju intelektualnih vještina i sposobnosti raščlanjuje na razumijevanje, primjenu, analizu, sintezu i evaluaciju. Bloomova taksonomija kognitivnih ciljeva učenja uzima se kao temelj za kasnije utvrđene kategorizacije znanja.

---

dr. sc. Željka Dijanić, profesorica savjetnica, Srednja škola Čazma, `zeljka.dijanic@skole.hr`
Alena Dika, učiteljica savjetnica, Osnovna škola Gornja Vežica, Rijeka, `alena.dika@gmail.com`
Tanja Debelec, profesorica savjetnica, I. OŠ Čakovec, `tanja.debelec@skole.hr`

Činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno znanje

U kognitivnom području Gagné, Briggs i Wager (1992.) izdvajaju tri kategorije znanja: deklarativno, proceduralno i metakognitivno. **Deklarativno** znanje uključuje poznavanje činjenica i razumijevanje odnosa među njima. Ono se odnosi na organiziranu cjelinu povezanih verbalnih informacija za čije je uspješno korištenje nužan razvoj intelektualnih vještina koje uključuju **proceduralno** znanje. Verbalne informacije odnose se na "što", uče se zapamćivanjem i provjeravaju reprodukcijom, a intelektualne vještine odnose se na "kako", stječu se vježbanjem te provjeravaju primjenom u rješavanju nekog problema. **Metakognitivno** znanje se odnosi na kognitivne strategije i poznavanje kognitivnih procesa što omogućava uspješno upravljanje procesom vlastitog učenja.

Anderson i Krathwohl (2001.) deklarativno znanje raščlanjuju na **činjenično** i **konceptualno** čime se dobivaju četiri različite kategorije znanja opisane u tablici 1.

Tablica 1. Dimenzije znanja i podvrste – revidirana Bloomova taksonomija

Dimenzije znanja	Podvrste znanja
činjenično znanje	• znanje pojmova (terminologije) • znanje specifičnih detalja i elemenata
konceptualno znanje	• znanje klasifikacija i kategorija • znanje principa i generalizacija • znanje teorija modela i struktura
proceduralno znanje	• znanje sadržajno specifičnih postupaka i algoritama • znanje specifičnih tehnika i metoda • znanje kriterija koji uvjetuju uporabu primjerenih postupaka
metakognitivno znanje	• strategijsko znanje • znanje o kognitivnim ciljevima, uključujući i odgovarajuće kontekstualno uvjetovano znanje • znanje o sebi

U Hrvatskoj je Tomislav Grgin (2004.) proučavao varijetete učeničkih znanja te ustanovio četiri kategorije različitog nazivlja, ali vrlo sličnih opisa kao prethodne kategorizacije. **Faktografsko** znanje je elementarno znanje u nekom području koje je pretpostavka ostalim složenijim varijetetima znanja, a iskazuje se poznavanjem specifičnih činjenica, vladanjem specifičnim nazivljem i navođenjem bitnih karakteristika elementarnih pojmova. Takvo znanje je nepovezano, iskustveno nedovoljno strukturirano te nema prave uporabne vrijednosti. Utvrđivanjem sličnosti i razlika ili uočavanjem uzročno-posljedičnih veza među usvojenim faktografskim činjenicama dolazi se do više razine znanja – **interpolacijskog** znanja. Ono uključuje misaone procese analize i sinteze, apstrakcije i generalizacije, a očituje se u poznavanju i razumijevanju općih pojmova, pravila, zakona, načela, teorija i struktura te ga je moguće prikladno strukturirati i tako zadržati u dugoročnom pamćenju. Odabirom i kombiniranjem najprikladnijeg modela ili metoda dolazi se do **operacijskog** znanja koje ima obilježje dinamičkog znanja, a očituje se u donošenju ideja, pravila, zakona ili postupaka te njihovoj primjeni u jednakim ili sličnim situacijama. Najviša razina znanja je **ekstrapolacijsko** znanje. Ono prelazi okvire poznatih situacija i korištenjem najsloženijih intelektualnih funkcija poprima obilježja stvaralačkog djelovanja te se očituje u rješavanju problema, što je u nastavi matematike naročito važno.

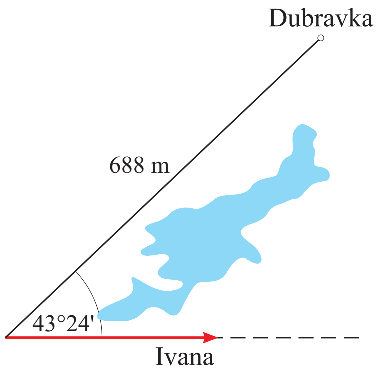
Situacijsko, konceptualno, proceduralno i strategijsko znanje

De Jong i Ferguson-Hessler (1996.) klasificiraju vrste znanja i kvalitetu znanja na primjeru rješavanja problema u fizici. Navode četiri vrste znanja: situacijsko, konceptualno, proceduralno i strategijsko. **Situacijsko** znanje obuhvaća poznavanje situacija koje se obično pojavljuju u određenom području čime se postavlja problem i prizivaju dodatna znanja (konceptualna i proceduralna). **Konceptualno** (deklarativno) znanje je statičko znanje o činjenicama, konceptima i pravilima unutar određenog područja, a **proceduralno** znanje uključuje operacije s pomoću kojih učenik iz jednog stanja postavljenog problema prelazi u drugo. **Strategijsko** znanje je najviši oblik znanja koje uključuje organizaciju procesa rješavanja problema kako bi se od postavljenog zadatka uspješno došlo do rješenja problema.

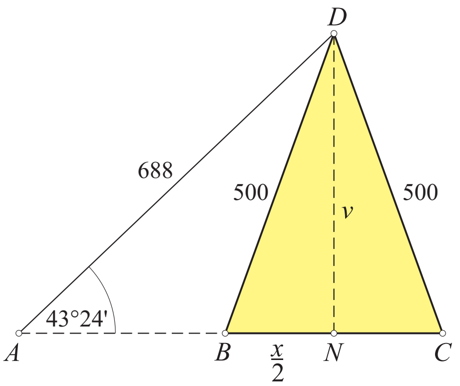
Sličnu kategorizaciju uvode Mason i Spence (1999.) koji razlikuju nekoliko vrsta i stupnjeva znanja u matematici: ***knowing that*** koje se odnosi na činjenično znanje, ***knowing how*** koje uključuje poznavanje tehnika i vještina te ***knowing why*** koje se odnosi na sposobnost strukturiranja potrebnih aktivnosti pri rješavanju matematičkih zadataka. Ove tri vrste znanja čine znanje o matematici (engl. ***knowing about***) koje je samo po sebi statično i bez sposobnosti primjene u novim situacijama nema neke uporabne vrijednosti. Stoga ukazuju na četvrti oblik aktivnog znanja ***knowing to act*** koje uključuje kreativnost, osjetljivost na situaciju te određeni stupanj svijesti o trenutku. Razvijanje svijesti o vlastitim mogućnostima u nastavi matematike izuzetno je bitno, a postiže se iskustvom i razvojem bogate mreže veza i okidača kako bi potrebne ideje u danom trenutku "pale na um" (engl. *come to mind*). Pogledajmo u idućem primjeru kako to funkcionira pri rješevanju složenijih zadataka.

Primjer 1. Zadatak preuzet iz oglednog ispita državne mature 2009. godine.

Dubravka i Ivana komuniciraju elektronskim uređajem dometa 500 m. Dubravka stoji na mjestu, a Ivana hoda kako je prikazano na slici 1. Koliko metara Ivana može prijeći od trenutka uspostavljanja do trenutka prekida komunikacije?



Slika 1. Zadatak iz oglednog ispita državne mature 2009. godine



Slika 2. Pomoćna skica (prepoznavanje situacije)

Situacijsko znanje pretpostavlja prepoznavanje konteksta i postavljanje problema. Učenik treba dopuniti skicu kako bi uočio što se traži (slika 2). Potom uočava pravokutne trokute (AND, BND) ili tupokutan trokut ABD, zadane, pomoćne i tražene elemente te prepoznaje koje matematičke činjenice i zakonitosti treba koristiti (definicije trigonometrijskih funkcija pravokutnog trokuta, Pitagorin poučak, sinusov poučak i sl.) pri čemu koristi svoje konceptualno znanje.

Proceduralno znanje uključuje prepoznavanje relacija iz dopunjene skice, a strategijsko pravilan odabir redoslijeda koraka kako bi uočene relacije postupno dovele do rješenja.

U trokutu AND vrijedi $\sin 43°24' = \frac{v}{688} \implies v = 688 \cdot \sin 43°24' = 472.716$ m. Potom se na trokut BND primijeni Pitagorin poučak: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 500^2 - 472.716^2$ čime se dobije da će Ivana prijeći $x = 325.82$ m.

Zadatak je, naravno, moguće riješiti i na još neke načine. U tupokutnom trokutu ABD vrijedi sinusov poučak $\frac{500}{\sin 43°24'} = \frac{688}{\sin\beta}$ iz čega je $\sphericalangle ABD = \beta = 109°$, odnosno $\sphericalangle NBD = \beta = 71°$. U trokutu BND vrijedi $\cos 71° = \frac{\frac{x}{2}}{500}$ iz čega slijedi da je $x = 325.57$ m.

Ovaj primjer ukazuje koliko je za uspješno rješavanje problema nužno posjedovati sva četiri varijeteta znanja te da svako sljedeće zahtijeva dobro poznavanje onih prethodnih vrsta znanja kao i njihovo pravilno korištenje u danoj situaciji, odnosno problemu.

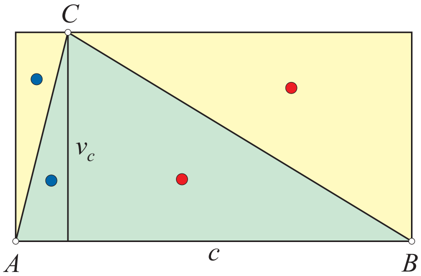
Relacijsko i instrumentalno znanje

U matematičkoj literaturi posebno se ističe Skempova (1976.) podjela na relacijsko i instrumentalno znanje matematike. **Relacijsko** se znanje opisuje kao razumijevanje "što učiniti i zašto", dok se **instrumentalno** znanje odnosi na poznavanje "pravila bez razloga". Instrumentalno znanje podrazumijeva pamćenje puno većeg broja različitih i naoko nepovezanih pravila. Relacijsko se znanje svodi na poznavanje nekoliko osnovnih principa i općenitijih pravila koji omogućavaju izgradnju konceptualnih struktura, a s pomoću njih učenik u danom trenutku lako dolazi do konkretnog pravila koje mu je potrebno. Za primjenu u nastavnoj praksi obje vrste znanja imaju i prednosti i nedostataka. Instrumentalno razumijevanje zahtijeva manje predznanja, pa se točan odgovor dobiva brzo i pouzdano čime su nagrada i osjećaj uspjeha neposredni i vrlo skori. Relacijsko razumijevanje matematike je prilagodljivo novim problemima i nestandardnim zadatcima, djelotvorno je samo po sebi s izrazito jakim motivacijskim učinkom jer jednom kad se pravilo ili koncept usvoji, lakše se i dulje pamti. Iako se relacijsko znanje može ocijeniti kao kvalitetnije, u nastavnoj je praksi instrumentalni pristup ponekad nužan zbog pretrpanih nastavnih programa koji onemogućavaju kvalitetnije proučavanje sadržaja.

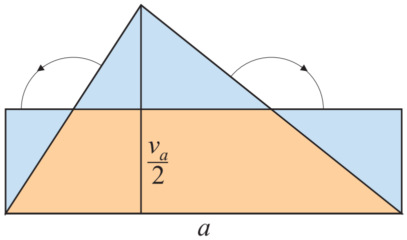
Primjer 2. Površina trokuta.

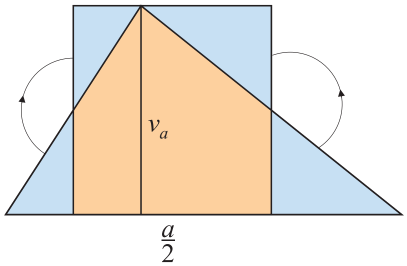
Pri usvajanju formule za izračunavanje površine trokuta relacijsko se znanje potkrepljuje vizualizacijom. Nakon što se ponovi površina pravokutnika, dijagonalom ga podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta. Učenici uočavaju da je površina jednog od dvaju tako dobivenih trokuta jednaka polovini površine pravokutnika. Potom ih se upoznaje s površinama šiljastokutnih i tupokutnih trokuta. Upotrebom raznih modela i didaktičkih pomagala učenici će lakše i brže usvajati sadržaje i trajno ih pamtiti. U tom smislu učitelji će koristiti papirnate modele, aplete dinamičkih matematičkih programa ili će dokaz potkrijepiti crtežima na ploči. Slijede neki od primjera kako vizualizirati formulu za izračunavanje površine trokuta:

1. "proširivanjem" – dopunjavanjem do pravokutnika

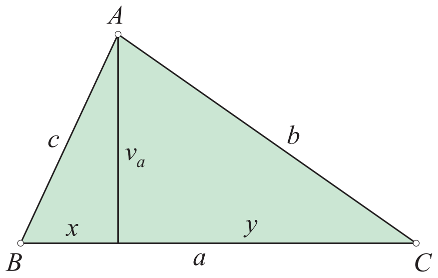


2. "prekrajanjem" – dijeljenjem trokuta na dijelove dobit ćemo pravokutnik





3. visinom podijelimo trokut na dva pravokutna trokuta pa računom dolazimo do formule



$$P = \frac{x \cdot v_a}{2} + \frac{y \cdot v_a}{2} = \frac{(x+y) \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}.$$

Vrlo je važno dobivenu formulu zapisati i usvojiti riječima:

$$\text{površina trokuta} = \frac{\text{duljina stranice} \cdot \text{duljina visine na tu stranicu}}{2}$$

kako bismo je znali primijeniti u složenijim problemskim zadatcima.

Kod relacijskog načina usvajanja novih znanja, osim konačne formule, jednako je važan i put spoznajnih i logičnih koraka kojim smo do određene formule došli. Kao i za površinu pravokutnog trokuta, sličan spoznajni put primjenjujemo i prilikom upoznavanja učenika s formulom za površinu paralelograma, romba i trapeza. Bitan je trenutak u kojem učenici uočavaju proces nastajanja novih formula dinamičnim preslagivanjem pravokutnika, kao što je to prikazano na slikama.

Nasuprot ovome pristupu, kod instrumentalnog znanja učenici pamte gotove formule bez razumijevanja, jednostavno uvrštavajući duljinu stranice i duljinu pripadne visine. Takvo je znanje kratkotrajno i vrlo često se događa da analogno površini pravokutnika učenici bez razmišljanja površinu trokuta izračunavaju prema formuli $P = a \cdot b \cdot c$. Kod uvođenja formula za izračun površine ostalih geometrijskih likova, prethodno instrumentalno znanje učenicima neće biti od dugoročne koristi. Bez razumijevanja će pamtiti formule za sve vrste četverokuta, vjerojatno ih vrlo brzo zaboraviti, a u novim situacijama očekivat će "brze i gotove formule". Takvo je znanje manjkavo, osobito u susretu sa složenijim zadatcima, a posebice u problemskima iz svakodnevnog života, u kojima se učenici nerijetko teško snalaze. Problemi su raznoliki: teški su im zadatci u kojima lik treba podijeliti na jednostavnije, kojima formulu za površinu poznaju, na slikama ne vide visinu u trokutu, što je posebno uočljivo kod tupokutnog trokuta itd. Nažalost, instrumentalno znanje je kod učenika sve češće pa učitelji moraju promisliti i pažljivo odabirati metode i postupke u radu kako bi se ovakvi problemi umanjili.

Strukturalno i operacionalno znanje

Sfard (1991.) je razradila klasifikaciju znanja u matematici baziranu na ontološko-psihološkom pristupu stavljajući naglasak na prirodu matematičkih subjekata (ontološki problem) te način na koji učenici shvaćaju matematičke pojmove (psihološka perspektiva). Ona govori o dvojnosti u prirodi znanja matematike te naglašava da se apstraktni pojmovi (poput broja ili funkcije) mogu pojmiti na dva različita načina – **strukturalno**, kada se matematičke pojmove promatra kao objekte, i **operacionalno** kada ih se promatra kao procese. Procesi učenja i rješavanja problema tako postaju zamršena međuigra između operacionalnog i strukturalnog shvaćanja istog pojma koji se međusobno nadopunjuju. Strukturalna koncepcija znanja je statična, trenutna i integrativna te se temelji na mentalnim slikama i vizualizaciji. Operacionalna koncepcija znanja je dinamična, sekvencijalna i detaljna, ona uključuje procese nastajanja nekog pojma i odgovarajuće algoritme, podržana je verbalnim prikazom te prethodi strukturalnoj koncepciji. Potporu za ovakvo razmišljanje Sfard nalazi kod Piageta koji također razlikuje dva načina matematičkog mišljenja – figurativno koje odgovara strukturalnoj koncepciji i operativno koje uključuje različite transformacije promatranog pojma.

Pronaći "skriveni" proces u zadanom matematičkom objektu zahtjevna je mentalna aktivnost, što ukazuje na činjenicu da se strukturalni i operacionalni koncept matematičkog pojma međusobno ne isključuju. Kao što objekt nije odvojiv od procesa, tako vrijedi i obrnuto. Upravo u ovoj sinergiji dohvaća se moć kvalitetnog matematičkog razmišljanja.

Primjer 3. Aritmetičke operacije i algebarski izrazi.

U primjerima navedenim u tablici 2 strukturalno znanje podrazumijeva vizualizaciju simbola te poznavanje pravila i postupaka aritmetičkih operacija i algebarskih izraza, dok operacionalno znanje uključuje mentalne slike koje nadograđuju strukturalno znanje s apstraktnim u matematici. Strukturalno će znanje dati točan rezultat samo ako učenik ne učini ni jednu pogrešku u naučenom matematičkom postupku ili pravilu, za razliku od operacionalnog znanja koje razvija spoznaju uloge objekta u procesu, te postaje koristan alat za analiziranje postavljenog problema i proučavanje veza između objekata iz zadatka.

Tablica 2.

Pojam	Poimanje zadataka kod učenika s razvijenim strukturalnim znanjem	Poimanje zadataka kod učenika s razvijenim operacionalnim znanjem
$5-2$	oduzimanje (dva broja)	oduzimanje broja 2 od broja 5 i zbrajanje broja 5 s brojem -2
$5:2$	dijeljenje (dva broja)	dijeljenje broja 5 brojem 2 i razlomak $\frac{5}{2}$
$3x+2$	algebarski izraz	zbroj broja 2 i trokratnika nepoznatog broja
$4\cdot 5$	množenje (dva broja)	zbrojiti broj 5 četiri puta

Primjer 4. Linearne jednadžbe.

Velika razlika u strukturalnom i operacionalnom konceptu znanja uočava se kod rješavanja linearnih jednadžbi. Tablica 3 prikazuje neke karakteristične primjere s naznačenim razlikama u konceptima znanja.

Strukturalni koncept znanja ukazuje na brojeve i rezultat kao statične objekte koji su povezani naučenim matematičkim pravilom, za razliku od operacionalnog koncepta znanja koje povezuje aritmetičke operacije zbrajanja i oduzimanja, primjenjujući svojstva istih operacija u cilju dobivanja točnog rezultata. Postojanjem veze objekt – proces razvija se fleksibilan i snažan doživljaj mate-

Tablica 3.

Pojam	Poimanje zadataka kod učenika s razvijenim strukturalnim znanjem	Poimanje zadataka kod učenika s razvijenim operacionalnim znanjem
$x-2=5$	Jednadžba koja se rješava na način: $x=5+2,$ $x=7$	Nepoznati broj x umanjenik je u zadanoj operaciji oduzimanja. Nepoznati umanjenik jednak je zbroju razlike i umanjitelja. $x=5+2$ $x=7$
$5-x=10$	Jednadžba koja se rješava na način: $-x=10-5$ $-x=5 \;/\cdot(-1)$ $x=-5$	Povezujući matematičke računske operacije učenik će riješiti zadatak u manje koraka, tj. učenik razumije da je umanjitelj jednak razlici umanjenika i rezultata operacije oduzimanja $x=5-10$ $x=-5$
$\frac{20}{2x}=2$	Jednadžba koja se rješava na način: $20=2x \;\cdot 2$ $20=4x$ $-4x=-20 \;/:(-4)$ $x=5$	Učenici promatraju jednakost izraza s obiju strana, te zaključuju intuitivno da x mora biti jednako 5. Također, znajući da razlomak predstavlja operaciju dijeljenja, znat će izraziti djelitelj $2x$ uz pomoć ostalih elemenata dijeljenja.

matičkih pojmova i simbola, omogućavajući razvoj složenih misaonih struktura, te primjenu stečenih znanja u novim situacijama. Izostanak ove veze polučit će greške koje se vrlo često događaju kod učenika:

- pri rješavanju jednadžbe $3x = 5$ učenici zapisuju npr. $x = 5 - 3$, ne razmišljajući o povezanosti aritmetičkih operacija množenja i dijeljenja
- pri rješavanju jednadžbe $10 - x = 5$ učenici zapisuju $x = 5 - 10$, ne razmišljajući o povezanosti aritmetičkih operacija zbrajanja i oduzimanja
- pri rješavanju jednadžbe $\frac{2}{3}x = 6$ učenici ne znaju i nisu sigurni treba li cijelu jednadžbu dijeliti ili množiti sa $\frac{2}{3}$
- često se događa da učenik nakon pogrešno ili ispravno riješenog zadatka ne izvrši povratnu vezu rješenja s postavljenim zadatkom, tj. ne provjeri odgovara li dobiveni rezultat postavljenom zadatku. Razvijen operacijski koncept razmišljanja uključuje dodatnu provjeru rješenja. Obuhvaćanje postavljenog zadatka i rješenja u cjelinu predstavlja mogućnost ispravka eventualne pogreške. Na primjer, ako učenik napravi pogrešku i za $10 - x = 5$ dobije rješenje $x = -5$, povratkom na postavljeni problem uviđa da rješenje nije točno, što mu daje priliku da ispravi netočan rezultat.

Navedene greške su posljedica strukturalnog koncepta razmišljanja. Operacionalnim znanjem učenik se koristi formulama koje poznaje, barata simbolima, te postavljeni zadatak dovodi u novu situaciju ili proces u kojem simboli i formule za novu situaciju postaju primjenjive i korisne.

Formalno, algoritamsko i intuitivno

Prema Fischbeinu (1993.) svaka matematička aktivnost zahtijeva korištenje triju dimenzija matematičkog znanja: formalnu, algoritamsku i intuitivnu. **Formalna** dimenzija odnosi se na poznavanje aksioma, definicija, teorema i dokaza koji čine aktivnu komponentu u procesu matematičkog rasuđivanja, ali njihovo poznavanje nije dovoljno za rješavanje matematičkog problema. **Algoritamska** dimenzija uključuje poznavanje pravila, postupaka rješavanja zadataka i njihovih teorijskih opravdanja, a odnosi se na vještinu rješavanja matematičkih problema koja se stječe vježbanjem. **Intuitivna** dimenzija je vrsta spoznaje koja se prihvaća izravno bez potrebe za dokazom, a obuhvaća ideje i uvjerenja o matematičkim pojmovima i mentalnim modelima koji se koriste za prikaz matematičkih pojmova i operacija. Sve tri dimenzije znanja se preklapaju međusobno, a u idealnom slučaju će doprinijeti uspješnom rješavanju problema. Međutim, često se javljaju nedosljednosti između algoritamskog, intuitivnog i formalnog znanja učenika što može biti izvor poteškoća u matematičkim aktivnostima kao što su zablude, kognitivne prepreke ili neadekvatno korištenje algoritama.

Primjer 5. Rješavanje linearnih nejednadžbi.

Formalna dimenzija znanja potrebna za uspješno rješavanje linearnih jednadžbi uključuje poznavanje svojstava relacije uređaja:

(1) tranzitivnost:

$$a < b \text{ i } b < c \Longrightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

(2) usklađenost sa zbrajanjem:

$$a < b \text{ i } c \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow a + c < b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

(3) usklađenost s množenjem:

$$a < b \text{ i } c > 0 \Longleftrightarrow ac < bc \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$
$$a < b \text{ i } c < 0 \Longleftrightarrow ac > bc \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

Algoritamska dimenzija uključuje poznavanje pravila i postupaka koji su ili "prepisana pravila" iz rješavanja linearnih jednadžbi, ili na drukčiji način izrečena svojstva relacije uređaja navedena u formalnoj dimenziji: riješiti se zagrada, riješiti se razlomka, nepoznate članove prebaciti na lijevu, a poznate na desnu stranu, zbrojiti nepoznate članove i zbrojiti poznate članove, podijeliti nejednadžbu brojem uz x i paziti da se "okrene" znak nejednakosti ako se dijeli ili množi negativnim brojem.

Intuitivna dimenzija obuhvaća činjenice koje se prihvaćaju same po sebi te su vrlo često rezultat iskustva i dobre predodžbe prethodno stečenih znanja o realnim brojevima, računskim operacijama te prikazu realnih brojeva na brojevnom pravcu. Intuitivno je tako učenicima jasno da su negativni brojevi lijevo od nule što se zapisuje kao $x < 0$, a pozitivni desno od nule što se zapisuje kao $x > 0$. Također je učenicima jasno pitanje "Kakvi moraju biti faktori da bi njihov umnožak bio pozitivan?" i znaju odgovor "Ili su oba faktora pozitivna, ili su oba faktora negativna".

Međutim, iskustvo iz nastavne prakse govori nam da je učenicima vrlo teško rješavati zadatke poput ovoga $(2x+1)(3-x) > 0$. Najčešće greške koje rade su sljedeće:

- množe zagrade, dobiju kvadratnu jednadžbu i stanu, ili zbrajaju članove uz x^2 i x te rješavaju linearnu jednadžbu
- nejednadžbu zapisuju kao samo jedan sustav linearnih nejednadžbi $2x+1 > 0$ i $3-x > 0$ zaboravljajući da i umnožak dvaju negativnih brojeva daje pozitivan broj
- zaboravljaju "okrenuti" znak nejednakosti kod $-x > -3$ ako množe sa -1, istovremeno ne shvaćajući da se nejednadžba $3-x > 0$ može riješiti i prebacivanjem nepoznatog člana na desnu stranu $3 > x$ što znači $x < 3$
- pri rješavanju nejednadžbe $2x > -1$ "okreću" znak nejednakosti jer vide minus
- nakon što dobiju rješenja $x > -\frac{1}{2}$ i $x < 3$ ili $x < -\frac{1}{2}$ i $x > 3$ ne znaju odrediti konačno rješenje, vrlo često se dvoume kada gledati presjek, a kada uniju dobivenih intervala.

Ovaj primjer ukazuje nam kako neusklađenost algoritamskog, intuitivnog i formalnog znanja učenika može dovesti do problema pri rješavanju zadataka.

Zaključak

Iz navedenog pregleda različitih kategorija znanja zaključujemo kako se učenici, osim po sposobnostima matematičkog i logičkog razmišljanja te radnim navikama, razlikuju i po varijetetima, odnosno stupnjevima usvojenih matematičkih znanja. Dosta je važno da kao nastavnici matematike osvijestimo probleme na koje učenici nailaze u pojedinim, posebice složenijim, odnosno višim kategorijama znanja kako bi bar donekle ublažili njihove međusobne različitosti, a naročito pomogli onim učenicima koji uz puno truda postižu nešto lošije rezultate.

Također napominjemo kako su navedene kategorizacije znanja stare dvadesetak i više godina. U novije vrijeme i metodičari matematike i psiholozi uglavnom prihvaćaju podjelu matematičkog znanja na proceduralno i konceptualno o čemu će biti riječi u narednom broju MIŠ-a.

LITERATURA

1/ L. W. Anderson, D. R. Krathwohl, eds. (2001.), *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*, NY: Addison Wesley Longman, Inc.

2/ S. B. Bloom, (1956.), *Taxonomy of educational objectives*, David Mc Kay Company.

3/ T. de Jong, M. G. M. Ferguson-Hessler, (1996.), *Types and qualities of knowledge*, Educational Psychologist, 31(2), 105–113.

4/ E. Fischbein, (1993.), *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*, U: Biehler, R. and other (eds.), Didactics of mathematics as a scientific discipline (231–245), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

5/ R. Gagné, L. Briggs & W. Wager, (1992.), *Principles of Instructional Design* (4th ed.), Fort Worth, TX: HBJ College Publishers.

6/ T. Grgin, (2004.), *Edukacijska psihologija*, Jastrebarsko: Naklada Slap.

7/ J. Mason, M. Spence, (1999.), *Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment*, Educational Studies in Mathematics, 38, 135–161.

8/ V. Poljak, (1985.), *Didaktika*, Zagreb: Školska knjiga.

9/ A. Sfard, (1991.), *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

10/ R. R. Skemp, (1976.), *Relational understanding and instrumental understanding*, Mathematics Teaching, 77, 20–26.