Matematičko modeliranje

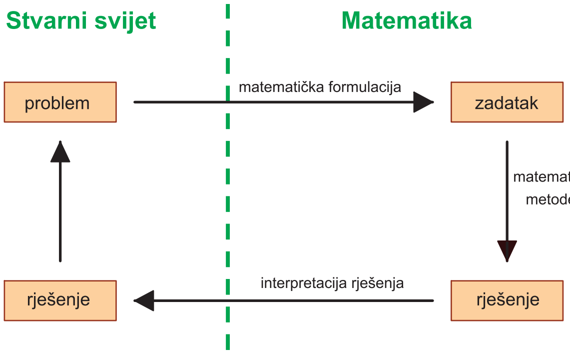
u osnovnoškolskoj nastavi

Erna Begović,
Zagreb

Uvod

Matematičko modeliranje je osnova primijenjene matematike, put kojim se matematika povezuje s prirodnim, tehničkim, ali i društvenim znanostima. Za razliku od uobičajenih zadataka iz matematičke zbirke, stvarni problemi koji dolaze iz primjene često su kompleksni, nestrukturirani i ponekad imaju više od jednog prihvatljivog odgovora. Matematičko modeliranje vodi djecu u stvarne situacije gdje se svakodnevne stvari izražavaju matematičkim jezikom i simbolima. Rješavanje problema primijenjene matematike zahtijeva prije svega razumijevanje, kako samog problema tako i njegovog rješenja. Do izražaja dolazi kreativnost: kako iskazati problem i koje metode koristiti, te timski rad, jer matematičari koji se bave primjenama često surađuju sa znanstvenicima iz drugih struka.

U svibnju 2015. pozvana sam da kao gost matematičar održim sat matematike učenicima sedmog razreda OŠ Vela Luka. Odlučila sam se za temu matematičkog modeliranja jer sam htjela upoznati učenike sa, za njih, novim dijelom matematike. Ujedno mi je bilo bitno da i oni bolji i oni lošiji u matematici mogu pratiti i razumjeti zadatke od početka



dr. sc. Erna Begović, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu, `ebegovic@fkit.hr`

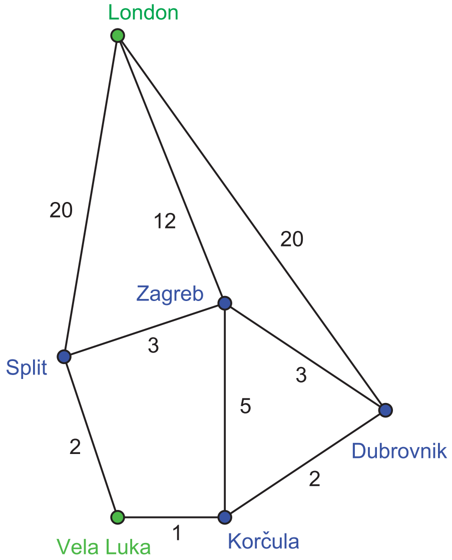
do kraja. Izbor teme se pokazao uspješnim o čemu svjedoče i dojmovi učenika.

Matematičko modeliranje dolazi u različitim oblicima: diferencijalne jednadžbe, dinamički sustavi, statistika, teorija igara i sl. Ovdje se bavimo modeliranjem za koje je dovoljno matematičko predznanje stečeno ranim osnovnoškolskim obrazovanjem. Prezentirano gradivo je dio kolegija Matematičko modeliranje [2], koji se slušao na drugoj godini inženjerskog studija matematike, s tim da su izbačene formalne definicije pojmova koji se koriste, te je sve objašnjeno isključivo na intuitivnoj razini.

Problem najkraćeg puta

Već su neko vrijeme popularne *web* stranice koje nalaze najjeftiniju ili pak najbržu opciju za putovanje između dvaju mjesta. Na kojem principu rade te stranice? Problem ilustriramo na primjeru putovanja od Vela Luke do Londona.

Primjer 1. (Putovanje). *Prometnu povezanost između Vela Luke i Londona prikazujemo donjim grafom. Vrhovi u grafu predstavljaju gradove kroz koje ćemo možda proći. Dva su vrha povezana bridom ako i samo ako su odgovarajuća dva grada prometno povezana. Težina brida predstavlja relativnu udaljenost (veličinu dobivenu kombinacijom udaljenosti i cijene puta) između dvaju vrhova. Zadatak je naći najkraći put od polaznog vrha (Vela Luka) do dolaznog vrha (London).*



Kako riješiti ovaj problem? Označimo s $l(X)$ udaljenost od polaznog vrha do vrha X, a s $d(X,Y)$ težinu brida koji povezuje vrhove X i Y. Napomenimo da će se veličina $l(X)$ dinamički mijenjati kroz rješenje kako pronalazimo bolji put. Za početak stavimo $l(\text{VL}) = 0$, te iz grafa iščitamo udaljenost do Korčule i Splita, $l(\text{Ko}) = d(\text{VL},\text{Ko}) = 1$, $l(\text{St}) = d(\text{VL},\text{St}) = 2$. To su jedina dva grada do kojih možemo doći direktno.

X	$l(X)$
Vela Luka	0
Korčula	1
Split	2

Iz polaznog vrha pomičemo se do najbližeg novog vrha, Korčule. Iz Korčule možemo doći do Dubrovnika i Zagreba. Udaljenost do Dubrovnika iznosi

$$l(\text{Du}) = l(\text{Ko}) + d(\text{Ko},\text{Du}) = 1 + 2 = 3,$$

a do Zagreba

$$l(\text{Zg}) = l(\text{Ko}) + d(\text{Ko},\text{Zg}) = 1 + 5 = 6.$$

X	$l(X)$
Vela Luka	0
Korčula	1
Split	2
Dubrovnik	3
Zagreb	6

Dalje se pomičemo po vrhovima na način da među svima koje još nismo razmotrili biramo onaj s najmanjom trenutnom vrijednosti l. Sljedeći na redu je Split. Iz Splita možemo u Zagreb i London. Dobivamo

$$l(\text{Zg}) = l(\text{St}) + d(\text{St},\text{Zg}) = 2 + 3 = 5 < 6,$$
$$l(\text{Lo}) = l(\text{St}) + d(\text{St},\text{Lo}) = 2 + 20 = 22.$$

Ranije smo dobili $l(\text{Zg}) = 6$. Kako je novi rezultat bolji, sada stavljamo $l(\text{Zg}) = 5$. Uočimo još da smo već pronašli put od Vela Luke do Londona, ali ne znamo je li upravo to najbolji put pa zato nastavljamo pretraživanje.

X	$l(X)$
Vela Luka	0
Korčula	1
Split	2
Dubrovnik	3
Zagreb	5
London	22

Preko Dubrovnika možemo doći do Zagreba i Londona. Vrijedi

$$l(\text{Zg}) = l(\text{Du}) + d(\text{Du}, \text{Zg}) = 3 + 3 = 6 > 5,$$
$$l(\text{Lo}) = l(\text{Du}) + d(\text{Du}, \text{Lo}) = 3 + 20 = 23 > 22,$$

pa ostaje $l(\text{Zg}) = 5$ i $l(\text{Lo}) = 22$.

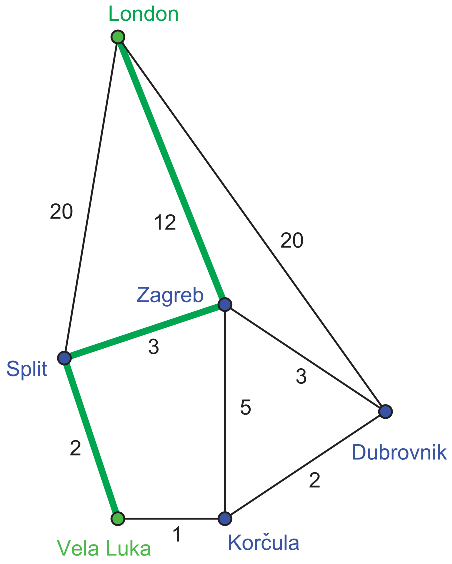
Na kraju, putem do Londona preko Zagreba dobijemo

$$l(\text{Lo}) = l(\text{Zg}) + d(\text{Zg}, \text{Lo}) = 5 + 12 = 17 < 22.$$

Novodobiveni put je kraći od puta koji smo imali prije pa mijenjamo podatke u tablici.

X	$l(X)$
Vela Luka	0
Korčula	1
Split	2
Dubrovnik	3
Zagreb	5
London	17

Razmotrili smo sve vrhove u grafu. Stoga, zaključujemo da težina najboljeg puta od Vela Luke do Londona iznosi 17, a uključuje relacije $\text{VL} - \text{St}, \text{St} - \text{Zg}, \text{Zg} - \text{Lo}$.



U pozadini rješenja ovog problema je Dijkstrin[1] algoritam za nalaženje najkraćeg puta u grafu, [3], [5]. Pokazalo se da učenici nisu imali nikakvih problema s razumijevanjem algoritma smještenog u konkretnu situaciju.

Matrice sparivanja

Često je potrebno napraviti optimalnu raspodjelu imovine ili posla, ili pak spojiti ljude u parove ili grupe. Na prvi pogled problem ne izgleda kao matematički i upravo je zato zanimljiv za približavanje matematike nematematičarima.

Primjer 2. (Raspodjela posla). *Učitelj je podijelio učenike u timove te im zadao projektne zadatke. Svaki se tim sastoji od po pet učenika, a svaki projekt od po pet zadataka. Učenici se unutar tima trebaju samostalno dogovoriti kako međusobno podijeliti posao, s tim da svakom učeniku treba pripasti točno jedan zadatak. Zadatci su sljedeći:*

(z1) *anketiranje*

(z2) *računanje statističkih podataka*

(z3) *pisanje referata*

[1] Edsger W. Dijkstra (1930. – 2002.), nizozemski informatičar

(z4) *crtanje grafova*

(z5) *prezentiranje.*

Svakom se učeniku neki zadatci sviđaju, a neki ne. Kako napraviti takvu raspodjelu pri kojoj će svatko raditi ono što voli?

Učenici prvog tima: Anja, Boris, Cvita, Dinko i Ela, izjasnili su se koje bi zadatke htjeli preuzeti. Na primjer, Anja bi anketirala ili crtala ili prezentirala, ali ne bi računala ni pisala. Napravimo tablicu (matricu sparivanja) u kojoj redci predstavljaju učenike, a stupci zadatke. Ako se Anji sviđaju prvi, četvrti i peti zadatak, na odgovarajućim mjestima upišemo jedinicu, a na ostalima nulu

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right] \end{array}.$$

Na isti način za ostale učenike upišemo jedinice i nule u odgovarajuće retke. Dobili smo sljedeću matricu sparivanja

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Prvo napravimo neku, ne nužno potpunu, raspodjelu. Dajmo Anji prvi, a Borisu drugi zadatak. Za Cvitu i Dinka više nije ostalo zadataka koji im se sviđaju pa ćemo ih zasad ostaviti bez zadatka. Eli ćemo dati četvrti zadatak. U matrici sparivanja raspoređene zadatke označimo kvadratićima,

$$\left[\begin{array}{ccccc} \blacksquare & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \blacksquare & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 1 \end{array}\right].$$

U sljedećem koraku poboljšavamo trenutnu raspodjelu. Cvita još nema svoj zadatak. Kako joj se sviđa jedino prvi zadatak, damo ga njoj umjesto Anji, a za Anju tražimo novi. Anja preuzima peti zadatak koji joj se sviđa, a još nije bio podijeljen. Da bismo prikazali nastale promjene, koristimo se lancem proširenja

$$\text{C} \leftrightarrow z_1 \not\leftrightarrow \text{A} \leftrightarrow z_5.$$

Matrica sparivanja sada ima oblik

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 1 & 0 & 1 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 1 \end{array}\right].$$

Potrebno je još naći zadatak za Dinka. Dinku se sviđaju prvi i drugi zadatak. Kako smo prvi upravo dodijelili Cviti, Dinko dobiva drugi zadatak. To znači da moramo naći novi zadatak za Borisa. Boris će dobiti treći zadatak, koji mu se sviđa, a ostao je nepodijeljen. Lanac proširenja je

$$\text{D} \leftrightarrow z_2 \not\leftrightarrow \text{B} \leftrightarrow z_3.$$

Konačno, dobili smo donju matricu sparivanja iz koje vidimo da je svaki učenik ovog tima dobio zadatak kojim je zadovoljan

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & 0 & 1 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 1 \end{array}\right].$$

Međutim, potpuno sparivanje kakvo smo napravili za prvi tim nije uvijek moguće. Ako se jednom učeniku ne sviđa niti jedan zadatak, lako je zaključiti da je potpuno sparivanje nemoguće. Postoje i drugi, manje očiti slučajevi kada je to tako.

Drugi tim čine Filip, Gita, Hana, Ivo i Janko. Neka je njihova matrica sparivanja dana sa

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Uzmimo sljedeće polazno sparivanje,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \blacksquare & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Želimo li proširiti ovo sparivanje, potrebno je dodijeliti zadatak Janku. U obzir dolazi samo treći zadatak, što znači da je potrebno naći novi zadatak za Filipa

$$\mathrm{J} \leftrightarrow z_3 \not\leftrightarrow \mathrm{F}.$$

Jedini drugi zadatak koji dolazi u obzir za Filipa je četvrti. Stoga tražimo novi zadatak za Gitu

$$\mathrm{J} \leftrightarrow z_3 \not\leftrightarrow \mathrm{F} \leftrightarrow z_4 \not\leftrightarrow \mathrm{G}.$$

Međutim, njoj bismo mogli dodijeliti ili treći ili četvrti zadatak, ali oba su se već pojavila u ovom lancu proširenja pa bismo se vrtjeli u krug. Zato ne možemo nastaviti ovaj lanac proširenja, niti možemo dobiti potpuno sparivanje.

Intuitivno zaključujemo da potpuno sparivanje nije moguće jer imamo previše nula u matrici sparivanja. Kako znamo koliko nula je previše? Odgovor na to pitanje daje Hallov[2] teorem, [4], [6]. Iz njega slijedi da potpuno sparivanje nije moguće ako i samo ako matrica sparivanja reda n sadrži $r \times s$ nul-podmatricu, takvu da je $r + s > n$. U ovom se primjeru takva podmatrica dobije na presjeku prvog, drugog i petog retka i istih stupaca. Dimenzije nul-podmatrice su 3×3 i vrijedi $3 + 3 = 6 > 5$. Učenici su intuitivno razumjeli tvrdnju teorema bez njegovog formalnog iskaza, te bez ikakvog znanja linearne algebre.

Zaključak

Matematičko modeliranje daje učenicima odgovor na pitanje "Što će meni matematika?". Modeliranje jednostavnih problema iz svakodnevnog života približava matematiku djeci, te im otkriva novi pogled na matematički svijet. Primjeri su potaknuli učenike da daju svoje ideje kako riješiti problem, kao i da pokažu vlastitu matematičku intuiciju. Prikazani primjeri pogodni su za rad u grupama čime učenici razvijaju i vještine timskog rada.

Autorica zahvaljuje OŠ Vela Luka na pozivu, suradnji i ugodnom iskustvu.

LITERATURA

1/ W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (ur.) (2007.): *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Springer.

2/ L. Čaklović (2005.): *Matematičko modeliranje*. Bilješke s predavanja, Sveučilište u Zagrebu, PMF – Matematički odsjek.

3/ E. W. Dijkstra (1959.): A note on two problems in connexion with graphs, *Numer. Math.* 1 (1), str. 269–271.

4/ P. Hall (1935.): On Representatives of Subsets, *J. London Math. Soc.* s1-10 (1), str. 26–30.

5/ `http://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm`

6/ `http://en.wikipedia.org/wiki/Hall's_marriage_theorem`

[2] Philip Hall, 1904.–1982., engleski matematičar