

Što funkcija je?

Što funkcija nije?



Branka Gotovac, Split

U pitanju je dosadna matematika, zanima me što je to funkcija...¹

Mnogi kažu da je funkcija jedan od najapstraktnijih pojmova u matematici. Koga god sam pitao što je to funkcija, dobivao sam manje-više isti odgovor: "preslikavanje iz jednog skupa u drugi po odgovarajućim pravilima"... S obzirom na njenu primjenu u srednjoj školi, smatram da većina nastavnika uopće ne obraća pažnju na pojmovni dio. Te tako postoje učenici koji rješavaju 90 % zadataka, a nemaju pojma o čemu je riječ.

Zašto najapstraktniji? Ja ovo shvaćam kao "nešto zavisi od nečega". Npr. imamo funkciju y koja zavisi od $x + 1$, eto uzmimo najjednostavniji primjer ($y = x + 1$). A možemo uzeti i najkompliciraniji..., ali se svodi na isto, da nešto (y) na lijevoj strani zavisi od nečega (ovo sve na desnoj strani). Ne znam je li ovo točno, ali meni odgovara u zadacima, jer stvarno ovu propisanu definiciju funkcije kao preslikavanja iz skupa u skup nikada nisam shvaćao.²

Uvod

U ovom su članku izložena tri zadatka na temu pojma funkcije. Prvog³ je autorica rješavala s dvjema generacijama studenata prve godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu na predavanjima iz kolegija Matematika 1, u sklopu obrade funkcija (u

principu je to ponavljanje sadržaja poznatih iz srednje škole i sistematizacija) s namjerom da studenti shvate i usvoje, ako nisu do tada, pojam funkcije i bijektivnosti funkcije, čak i da ih lakše zapamte. Na temelju povratnih informacija (rezultata) od studenata može se zaključiti da je zadatak poslužio svrsi.

mr. sc. Branka Gotovac, predavač na Katedri za matematiku, Kemijsko-tehnološki fakultet, Sveučilište u Splitu, gotovac@ktf-split.hr

¹ Pitanje u cijelosti i, kako se navodi, *najbolji odgovor* može se naći na: <http://znalac.com/answers/Sta-je-to-funkcija.html>.

² Cjelovit odgovor i prethodno navedeno "pitanje" može se vidjeti na: <http://www.elitesecurity.org/t463999-Funkcija-njena-apstraktnost-matematici>.

³ Zadatak je sadržan u radu Branke Gotovac *Putovanje Londonom kroz četiri zadatka*, objavljenom u časopisu Poučak (Hrvatsko matematičko društvo, Profil International d.o.o., Zagreb, 2013, 14 (54), 2013, 44–55.).

Inače je zadatak 1 inspiriran boravkom autorice u Londonu i posjetom Nacionalnoj galeriji. Svojevrsna je priča izgrađena na osnovu raznih podataka. U zadatku se na zabavan način provjerava razumijevanje definicije funkcije i bijektivnosti funkcije, a preko dijagrama se i uči kroz razne situacije nastale poigravajući se slikarima i njihovim slikama.⁴ Rješavači se potiču i na istraživanje povezanosti slikarstva i matematike. Zadatak je pogodan za rad u paru.

Druga dva zadatka uradci su dvojice studenta. Zadatci koje su osmislili, izdvojeni su iz ostalih uradaka studenata napravljenih u okviru dvaju različitih projekata. Ne ulazeći u opis provedenih projekata, niti dublje u ciljeve pokretanja istih (studenti aktivni sudionici nastavnog procesa, poticanje kreativnosti studenata, primjena stečenih znanja i izvan predavaonice...) valja napomenuti da projektni zadatak niti u jednom slučaju nije bio da studenti sami smisle primjere funkcija, a da pravilo pridruživanja nije unaprijed zadano. Ovaj je dvojac svojim maštovitim i domišljatim zadacima potvrdio da im je pojam funkcije konceptualno jasan.

Zadatak 2 prekrasan je primjer funkcije, poseban zbog finoće, suptilnosti veze između realnih objekata (brodova i vezova). Student⁵ je s istančanim osjećajem "prepoznao" matematiku u realnom kontekstu, za većinu promatrača teže uočljivu, skrivenu, iako posve prirodnu.

Zadatak je veoma inspirativan. Tako bismo i ovdje, igrajući se konopima kojima su brodovi privezani za vezove na rivi, vezujući ih i odvezujući, mogli stvoriti nove, drukčije odnose među objektima i ispitivati ih. Ovaj je zadatak inspirirao i autora⁶ sljedećeg zadatka. Treći je zadatak varijacija drugog. Student ga je formirao međusobno zamjenjujući polazni i dolazni skup u zadatku 2.

Ne možemo ne primijetiti kako se poticaj, inspiracija širi. Dovoljna je tek iskra da potpali vatru i razbuktati plameni kovčac motivacije i inspiracije u kojem učitelj postaje učenikom, a učenici učiteljima.

Tri zadatka

Navedimo najprije definiciju funkcije. Definirat ćemo i surjekciju, injekciju i bijekciju funkcije. Definicije treba popratiti odgovarajućim shematskim prikazima, dijagramima⁷. Time će se pospješiti razumijevanje definiranih pojmova.

Definicija (funkcija):

Neka su A i B neprazni skupovi, a f pravilo po kojem se svakom elementu skupa A pridružuje jedan i samo jedan element skupa B . Tada kažemo da je f funkcija ili preslikavanje iz skupa A u skup B .

Pišemo, $f : A \rightarrow B$ ili $x \mapsto y = f(x)$.

Skup A je domena (ili područje definicije funkcije), skup B kodomena (ili područje vrijednosti funkcije), x je nezavisna varijabla (ili argument), y zavisna varijabla, $y = f(x)$ je vrijednost funkcije f na elementu x , a skup $R_f = \{f(x) \in B : x \in A\}$ je slika funkcije.

Definicija (surjekcija, injekcija, bijekcija):

Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je:

- surjekcija (ili preslikavanje na) ako je $R_f = B$
- injekcija (ili 1-1 preslikavanje) ako $(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- bijekcija (ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je surjekcija i injekcija.

Zadatak 1.

Nacionalna galerija baštini oko 2300 slika nastalih u razdoblju od 13. stoljeća do ranih godina 20. stoljeća.⁸ Ulaz u galeriju je slobodan (tipično britansko pravilo) i svatko može uživati u blagodatima i napojiti se ljepotom djela jedne od najvećih svjetskih zbirki. U kazalištu (Renoir, Pierre-Auguste), Žitno polje s čempresima (van Gogh, Vincent), Večera u Emausu (Caravaggio, Michelangelo Merisi), Kupaćica (Rembrandt van Rijn), Plaža u Trouvilleu

⁴ Više o raznim aspektima zadatka može se pročitati u radu prije navedenom.

⁵ Ivan, student Preddiplomskog studija kemije

⁶ Denis, student Preddiplomskog studija kemije

⁷ Vidjeti zadatak 1.

⁸ Prema podatcima sa: <http://www.nationalgallery.org.uk/paintings/collection-overview/>.

(Monet, Claude-Oscar), *Kišobrani* (Renoir), *Dama za virginalom* (Vermeer van Delft, Jan), *Venera u ogledalu* (Velázquez, Diego), *Suncokreti* (van Gogh), *Autoportret u dobi od 34 godine* (Rembrandt), samo su neka od remek-djela ove londonske riznice.

U obližnjoj Nacionalnoj galeriji portreta izloženi su portreti poznatih Britanaca. Čak je 45 portreta⁹ velikana znanosti Isaaca Newtona¹⁰.

Ovdje će biti riječ o pojmu funkcije čijem su razvoju svoj doprinos, kroz diferencijalni račun, dali Newton i Leibniz¹¹, Newton baveći se problemom određivanja brzine tijela u danom trenutku, a Leibniz rješavajući problem određivanja tangente zadane krivulje u nekoj točki. Leibniz 1673. godine prvi koristi riječ *funkcija* kako bi opisao ovisnost veličine y o promjenljivoj veličini x . S vremenom se definicija pojma funkcije dalje razvijala prema definiciji koju danas koristimo¹².

Stavimo sada slavne slikare i njihove slike u službu njezina veličanstva – funkcije.

(Istraži povezanost slikarstva i matematike i otkrij “matematiku u slici”: zlatni rez¹³, popločavanje ravnine¹⁴ na primjer.)

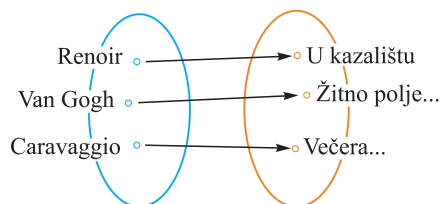
Promotri slike 1 – 7 i odgovori.

1. Zašto dijagrami na slikama 2 i 3 ne predstavljaju funkcije?

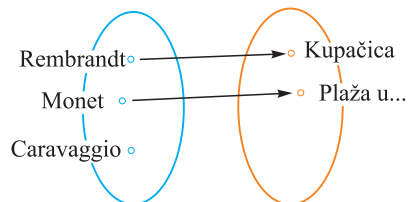
Za dijagrame funkcija (slike 1 i 4) odredi domenu, kodomenu i sliku tih funkcija.

2. Dijagrami dani na slikama 5, 6 i 7 su dijagrami funkcija. Provjeri. Koji predstavlja surjekciju, injekciju, a koji bijekciju?

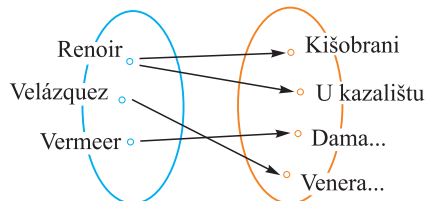
Slikarima koji su ovdje navedeni pridružili smo broj njihovih slika izloženih u londonskoj Nacionalnoj galeriji¹⁵.



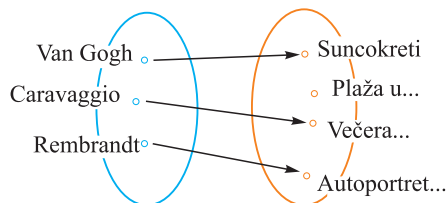
Slika 1.



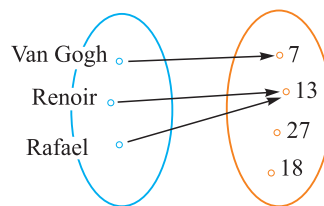
Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.

⁹ Prema podatcima sa: <http://www.npg.org.uk/collections/search/sitA-Z/sitn.php>

¹⁰ Isaac Newton (1642. – 1727.), fizičar, matematičar i astronom

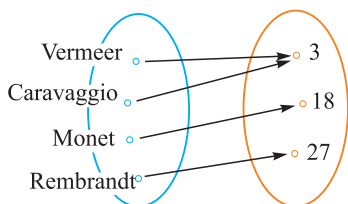
¹¹ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.), njemački matematičar, fizičar, filozof i diplomat

¹² Dirichlet-Bourbakijeva definicija

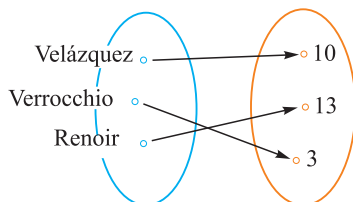
¹³ Istraži je li neka od slika gore navedenih primjer zlatnog reza u likovnoj umjetnosti

¹⁴ Vidi Escherove slike.

¹⁵ Prema podatcima sa: <http://www.nationalgallery.org.uk/artists/>



Slika 6.



Slika 7.

3. Provjeri surjektivnost, injektivnost i bijektivnost na prethodno danim dijagramima funkcija (vidi slike 1 i 4).
4. Pretpostavimo da je Renoirova slika *U kazalištu* otuđena iz Nacionalne galerije (i izostavljena iz naših zadataka). Ispitaj koje bi bile "posljedice" krađe Renoirove slike na naše zadatke.

Zadatak 2.

Razumiješ li definiciju funkcije? Kako bi to mogao/la pokazati koristeći se danim fotografijama?

- a) Promotrimo brodice na fotografiji (slika 8) u prvom planu. Neka je A skup brodica, a B skup vezova na rivi za koje su brodice privezane. Pramčana veza brodica na fotografiji je jednos-truka, tj. privezane su za 1 vez na rivi (pravilo f).

Je li f funkcija iz skupa A u skup B ?

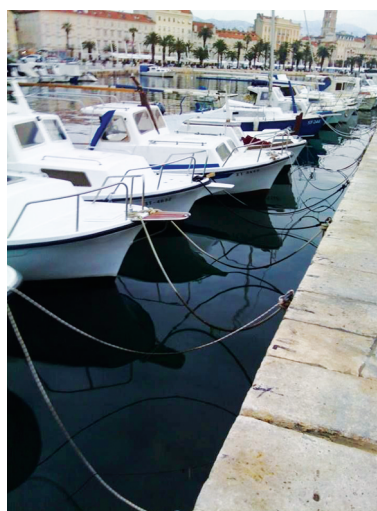
Svakom elementu skupa A (brodicama) pridružen je jedan i samo jedan element skupa B (jedan vez), pa zaključujemo da f je funkcija.

- b) Promotrimo fotografiju (slika 9). Neka je A skup brodica, a B skup vezova na rivi za koje su brodice privezane. Pretpostavimo da je pramčana veza brodica na fotografiji dvostruka, tj. da su privezane za 2 veza na rivi (pravilo f).

Je li f funkcija iz skupa A u skup B ?



Slika 8.



Slika 9.

Svakom elementu skupa A (brodicama) pridružena su dva elementa skupa B (dva veza), pa zaključujemo da f nije funkcija.

Zadatak 3.

- a) Promotrimo brodice na fotografiji (slika 8) u prvom planu. Neka je A skup vezova na rivi, a B skup brodica koje su za njih privezane. Za svaki promatrani vez privezana je jedna brodica (pravilo f). Je li f funkcija iz skupa A u skup B ?

Svakom elementu skupa A (vezovima) pridružen je jedan i samo jedan element skupa B (brodica), pa zaključujemo da f je funkcija.

- b) Promotrimo fotografiju (slika 9). Neka je A skup vezova na rivi, a B skup brodica koje su za njih

privezane. Svakom vezu pridružujemo brodicu za njega privezanu (pravilo f). Pretpostavimo da postoji barem jedan vez za koji su privezane 2 brodice. Je li f funkcija iz skupa A u skup B ?

Postoji element skupa A (vez) kojemu su pridružena dva elementa skupa B (dvije brodice), pa zaključujemo da f nije funkcija.

Završne napomene

Put prema usvajanju pojma funkcije mogli bismo razložiti na ovaj slijed koraka:

1. Definiciju funkcije popratiti shematskim prikazom funkcije, dijagramom. Zanimljivim i zabavnim zadacima, ilustrativnim primjerima u realnom kontekstu (osmisliti ih!) poticati učenje definicije i pospješiti razumijevanje.

Rad u paru ili grupi, odmah od uobičajenog načina rada (uvođenje novosti i raznolikosti u nastavu) također može biti od koristi i pospješiti

učenje. Pobudit će se zanimanje učenika i fokusirati njihova pažnja.

2. Zadati učenicima za samostalni rad da osmisle nekoliko primjera za ilustraciju. (Što funkcija je? Što funkcija nije?)
3. Upriličiti prezentaciju učeničkih uradaka na ovu temu. Važno je da ih nastavnik prethodno pregleda kako bi se otklonile eventualne nejasnoće i izvršile potrebne korekcije. Tako bi se učenici mogli pripremiti za praćenje prezentacije i uživati u njoj. Učenik postaje aktivan sudionik u procesu izgradnje vlastitog znanja.

Možda i ovako učenicima otkrijemo da *“matematika nipošto nije suhoparna, dosadna i bez mašte, već naprotiv, poput plemenite djevojke uzvraća ljubav onome koji je razumije i voli”* (Vladimir Devidé).

Učinimo da je naši učenici razumiju i vole.

VEČER MATEMATIKE 2015.

Poštovane kolegice i kolege!

Treća Večer matematike u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva održat će se 3. prosinca 2015. s početkom u 18 sati. Cilj ove manifestacije je popularizacija matematike te poticaj učenika za nastavak matematičkog obrazovanja.

Prošle je godine u Večeri matematike sudjelovalo više od 55 000 djece i njihovih roditelja, a prvi put su nam se priključili i dječji vrtići. Nadamo se da ćemo ove godine premašiti taj uspjeh. Materijale za provedbu Večeri matematike priprema Hrvatsko matematičko društvo, a sudionici su slobodni nadopunjavati ih i prilagođavati. Priključite nam se! Prijavite sudjelovanje vaše institucije do 3. studenoga 2015. na vecermatematike@math.hr kako bismo vam mogli na vrijeme poslati materijale.

Više o Večeri matematike i popratnim događanjima pročitajte na našim mrežnim stranicama

<http://www.matematika.hr/vecermatematike/2015/>

Veselimo se suradnji!

Tanja Soucie, prof.
voditeljica nastavne sekcije
Hrvatskog matematičkog društva