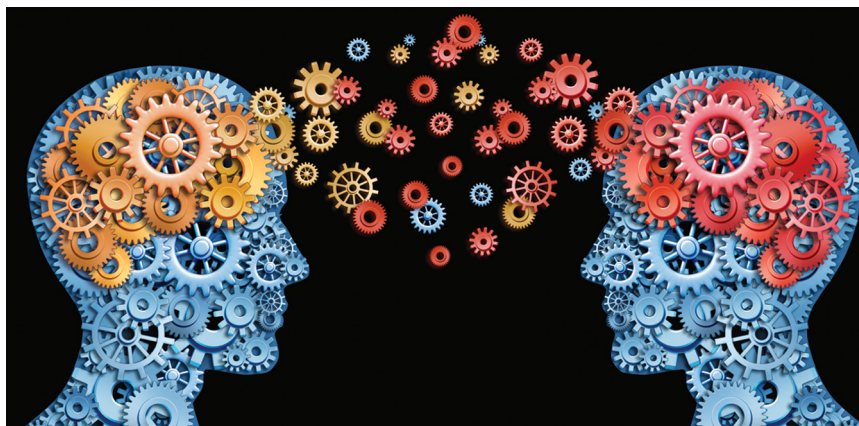


Proceduralno i konceptualno znanje

Željka Dijanić, Čazma
i Tanja Debeleć, Čakovec



Uvod

Koliko je kvalitetno matematičko znanje naših učenika? U kojoj mjeri učenici razumiju postupke koje provode rješavajući neki zadatak? Znaju li primijeniti usvojene nastavne sadržaje u "novim" dotad neviđenim zadacima? U razredima kojima predaju nastavnici matematike mogu uočiti dva diametralno suprotna načina kojima neki učenici pokazuju svoje poznavanje matematike. Jedni uvježbavaju rješavanje zadataka do razine automatizacije, čak vrlo brzo i točno rješavaju rutinske zadatke, ali u novim nestandardnim zadacima se ne snalaze, ne znaju primijeniti svoje znanje. Drugi više vole kada se uči nešto novo, njima nepoznato, kada u otkrivanju novih pravila i postupaka do izražaja dolaze njihove ideje, ali kasnije možda neće biti toliko marljivi pri vježbanju što može rezultirati čestim pogreškama i netočnim rješenjima zadataka.

Pogledajmo sljedeća dva primjera.

Primjer 1. Računske operacije s razlomcima.

Kod usvajanja operacije zbrajanja razlomaka u šestom razredu učenici razlomke proširivanjem svode na najmanji zajednički nazivnik, te savladavaju postupak zbrajanja razlomaka različitih nazivnika. Većina učenika to zna kada zbrajanje zapisujemo kao u primjeru:

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{12}{28} + \frac{7}{28} = \frac{19}{28}$$

ili skraćeno

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{12}{28} + \frac{7}{28} = \frac{19}{28}$$

Međutim, kasnije radi bržeg računanja uvodi se još kraći zapis zbrajanja

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 7}{28} = \frac{19}{28}$$

i učenici polako zaboravljaju što radimo i zašto. Kada najmanji zajednički nazivnik 28 podijele sa 7 često se dogodi da ne znaju treba li brojnik 3 pomnožiti sa 4 ili mu dodati 4.

Željka Dijanić, profesorica savjetnica, Srednja škola Čazma, zeljka.dijanic@skole.hr
Tanja Debeleć, profesorica savjetnica, I. OŠ Čakovec, tanja.debeleć@skole.hr

Novi problem nastaje kada se uvedu operacije množenja i dijeljenja razlomaka. Uočavamo da na satovima vježbavanja i ponavljanja računskih operacija s razlomcima neki učenici počnu "unakrsno" kratiti brojnike i nazivnike pri dijeljenju, pa čak i zbrajanju i oduzimanju, neki zbrajaju razlomke tako da zbroje brojnike i zbroje nazivnike ili pri množenju traže najmanji zajednički nazivnik i slično.

Činjenica je da u nastavi matematike postoje operacije koje bi učenici trebali usvojiti do razine automatizacije. Međutim bez dubljeg razumijevanja potrebe provođenja upravo tih postupaka, pitanje je koliko je tako usvojeno znanje kvalitetno, odnosno dugotrajno i što će se dogoditi nakon što uvedemo neke nove nastavne sadržaje.

Primjer 2. Rješavanje linearnih jednadžbi.

Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom učenici prvi puta susreću u šestom razredu osnovne škole. Pritom se uče pravila, odnosno postupci (riješiti se razlomka, zagrada, nepoznate članove prebaciti na lijevu stranu, a poznate na desnu i sl.) koje većina učenika jako dobro zapamti, ali često se događa da na kraju ne dobiju točno rješenje jednadžbe.

Pogledajmo primjer rješavanja jednadžbe:

$$\frac{x+3}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{3x}{2}.$$

Postoji nekoliko vrlo čestih grešaka koje čine učenici koji nisu dovoljno vježbali, odnosno nisu riješili dovoljno zadataka. Jedni krato odmah u početku:

$$\frac{x+3^1}{3^1} - \frac{x+2^1}{6^1} = \frac{3x}{2}.$$

Oni su usvojili postupak kraćenja razlomaka, ali ne razumiju zašto to u ovom slučaju ne mogu tako raditi.

Drugi dobro krenu, cijelu jednadžbu množe sa 6 kako bi se riješili razlomka, ali krivo provedu to množenje pa umjesto

$$2(x+3) - (x+2) = 9x$$

pišu

$$2x+3-x+2=9x$$

(zaboravljaju da 2 množi oba člana brojnika ili da minus ispred razlomka mijenja predznak svim članovima brojnika).

Ili se zna dogoditi da nakon množenja sa 6 pišu

$$3(x+3) - 6(x+2) = 2 \cdot 3x.$$

Problem može nastati čak na samom kraju. Gornja jednadžba svodi se na jednadžbu $-8x = 2$ koja može dati vrlo različita netočna rješenja ako se ne razumije što znači x u toj jednadžbi (npr. $x = 2 + 8 = 10$, $x = -8 : 2 = -4$ i sl.).

Učenicima valja naglasiti kako pravila za računanje s racionalnim brojevima vrijede i ovdje. No, osim poznavanja svih tih pravila nužno je riješiti puno zadataka kako bi se postigla brzina, preciznost i točnost provođenja svih postupaka do kraja.

Uočavamo dakle dvije razine usvojenosti znanja kod učenika – poznavanje postupka rješavanja zadatka (proceduralno znanje) i poznavanje pojmova, ideja i koncepata (konceptualno znanje). Za uspješno ovladavanje matematičkim sadržajima podjednako je važno i razumijevanje koncepata i ovladavanje algoritamskim postupcima.

Definicija i kvaliteta proceduralnog i konceptualnog znanja

Klasifikaciju matematičkog znanja na konceptualno i proceduralno uvode James Hiebert i Patricia Lefevre (1986.). Definiraju ih na sljedeći način:

Konceptualno znanje karakterizira se kao znanje bogato u odnosima. Možemo ga shvatiti kao mrežu znanja koja povezuje odvojene dijelove informacija. Ti su odnosi prožeti pojedinačnim činjenicama i pravilima tako da smisleno umrežavaju sve dijelove informacija.

Proceduralno znanje sačinjeno je od dva različita dijela. Prvi se dio odnosi na formalni jezik, odnosno

uporabu matematičkih simbola. Drugi se dio sastoji od pravila, algoritama ili postupaka kojima se rješava matematički zadatak. To su korak-po-korak upute koje propisuju kako rješavati zadatak. Ključna je značajka tih postupaka da se provode unaprijed određenim linearnim slijedom.

Možemo zaključiti kako nam konceptualno znanje omogućava razumijevanje pojmova, ideja i koncepata koji određuju neko područje te odnosa među njima, dok nam proceduralno znanje, koje uključuje vještine, algoritme i strategije, omogućava brzo i efikasno rješavanje problema.

Iako često citirane, navedene definicije naišle su na brojne kritike. Jedna od najvećih zamjerki je sugestija da je proceduralno znanje površno za razliku od konceptualnog koje se smatra dubinskim. Vrsta znanja i kvaliteta znanja dvije su nezavisne dimenzije pa tako i proceduralno i konceptualno znanje mogu imati široki raspon kvalitete od površnog do dubinskog. Star (2000.) smatra da je dubinska razina znanja povezana s razumijevanjem, apstrakcijom, kritičkom prosudbom i procjenom. Ta je razina strukturirana i pohranjena u memoriji na način koji ga čini maksimalno korisnim

za izvođenje postupka rješavanja zadataka, dok je površinska razina znanja povezana s učenjem na pamet, reprodukcijom, pokušajima i pogreškama. Također naglašava da su koncepti usvojeni kada se postojeće činjenično znanje može prepoznati, identificirati, objasniti, procijeniti, stvoriti, usporediti, odabrati, odnosno kada se koncepte “razumije”. Nasuprot tome, postupci su usvojeni kada vještine postanu rutina i mogu se vrlo brzo i točno izvoditi, odnosno kada postanu automatizirani.

Baroody, Feil i Johnson (2007.) razlikuju kvalitetu obiju vrsta znanja – i proceduralnog i konceptualnog (tablica 1.).

Star (2000.) ističe krivu interpretaciju složenosti proceduralnog i konceptualnog znanja. Konceptualno znanje se često ocjenjuje intervjuima čime se sugerira da je ono višeslojno, nijansirano i vrlo složeno, dok se proceduralno znanje isključivo operacionalizira i ocjenjuje kao točno ili netočno izvođenje postupka čime se sugerira da je ono jednostavnije i manje nijansirano. On smatra da proceduralno znanje može biti itekako složeno. Osnovna je karakteristika dubinskog proceduralnog

Tablica 1. Kvaliteta proceduralnog i konceptualnog znanja (Izvor: Baroody, Feil i Johnson, 2007., str. 118)

	Kvaliteta znanja	
Dimenzije znanja	površno	dubinsko
proceduralno	• pravila površne razine (korak-po-korak znanje) • konkretni postupci (koraci) zadani u zadatku • slaba shema (izolirano proceduralno znanje)	• pravila dublje razine (služe za kreiranje ili izmjenu pravila površne razine) • proceduralne “operacije koje uključuju izvođenje koraka izvan sustava” (njima se koristimo pri planiranju koje uključuje konceptualno znanje) • jaka shema (integrirano proceduralno znanje)
konceptualno	• slaba shema • koncepti primarne razine (manje apstraktni) – unutar specifičnog konteksta	• jaka shema • koncepti reflektivne razine (više apstraktni) – unutar različitog konteksta
proceduralno i konceptualno	• teorija vježbanja (<i>drill</i>) • instrumentalno razumijevanje (pravila bez razloga) • proceduralno ili konceptualno • znanje o – koje uključuje kako, stoga i zašto • rutinsko znanje	• teorija smisla • relacijsko razumijevanje (što učiniti i zašto) • proceptualno • znanje za – aktivno, praktično znanje koje potiče na kreativno djelovanje • prilagodljivo znanje

znanja fleksibilnost koja se očituje kroz sposobnost učenika da između mnogih metoda u danom trenutku odabere onu najbolju.

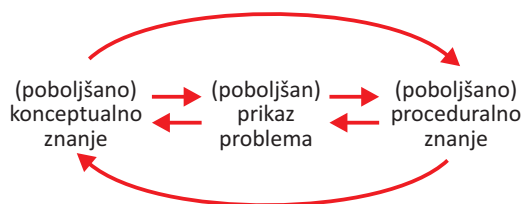
Povezanost proceduralnog i konceptualnog znanja

U *Principima i standardima za nastavu matematike* (NCTM, 2000.) posebna se važnost pridaje ravnoteži proceduralnog i konceptualnog znanja kao temelja za nastavu matematike na svim razinama obrazovanja: *“Razvoj perfektnog znanja zahtijeva ravnotežu i vezu između konceptualnog razumijevanja i vještina računanja. S jedne strane, metode računanja koje su previše uvježbane bez razumijevanja često se zaboravljaju ili krivo pamte. S druge strane, razumijevanje bez tečnosti u računanju može sputavati proces rješavanja problema.”*

Istraživači već dulje vrijeme vode raspravu koje je znanje važnije i kojim redoslijedom bi ih se trebalo usvajati. Empirijska istraživanja (Haapasalo i Kadijevich, 2000.) pokazuju da postoje četiri različite vrste povezanosti proceduralnog i konceptualnog znanja: (1) proceduralno i konceptualno znanje nisu povezani, (2) proceduralno je znanje nužno i dovoljno za stjecanje konceptualnog, (3) konceptualno je znanje nužno, ali ne i dovoljno za stjecanje proceduralnog, (4) proceduralno je znanje nužno, ali ne i dovoljno za stjecanje konceptualnog.

Rittle-Johnson, Siegler i Alibali (2001.) utvrđuju da ne postoji samo pozitivna korelacija između proceduralnog i konceptualnog znanja, nego i prognostička povezanost. To znači da je stjecanje jedne vrste znanja preduvjet za stjecanje one druge, a redoslijed ovisi o području. Na primjer, kod brojenja (vrtićki uzrast djece), množenja i dijeljenja cijelih brojeva, množenja razlomaka proceduralno se znanje pojavljuje prije konceptualnog. Kod zbrajanja cijelih brojeva, zbrajanja razlomaka, proporcionalnosti, potenciranja konceptualno se znanje pojavljuje prije proceduralnog. Njihova istraživanja pokazala su da je razvoj konceptualnog razumijevanja i proceduralnih vještina iterativan proces što

znači da se proceduralno i konceptualno znanje razvijaju uzastopno i tako nadopunjuju i međusobno osnažuju. Viša razina usvojenosti jednoga vodi do više razine usvojenosti drugoga što opet izaziva višu razinu onoga prvoga i tako dalje (slika 1). Pritom je važno da učenik na zadanom problemu ili sadržaju aktivno radi čime si poboljšava njegov prikaz: promatra druge dok rješavaju zadatke (npr. učenika pred pločom), sluša verbalne upute nastavnika, traži sličan zadatak, provodi refleksiju vlastitog znanja, raspravlja s drugim učenicima, koristi se dodatnom literaturom i sl.



Slika 1. Iterativni model razvoja konceptualnog i proceduralnog znanja (Izvor: Rittle-Johnson, Siegler i Alibali, 2001., str. 347)

Primjer 3. Postotak i postotni račun.

U nastavi matematike postotni račun obrađuje se u sedmom razredu, ali učenici se s pojmom postotka susreću i ranije (npr. nastava geografije – oko 70 % površine Zemlje prekriveno je vodom, 10 % svjetskog stanovništva živi u Europi). Intuitivno im je jasno što označava postotak – omjer nekog broja naprama 100 (posjeduju osnovno konceptualno znanje). Potom se uvodi zapisivanje postotka u obliku omjera, razlomka i decimalnog broja što je potrebno dobro uvježbati (proceduralno znanje) prije nego se krene na računanje s postotcima.

Kod računanja s postotcima uz pojam postotka uvode se i pojmovi osnovne vrijednosti i postotnog iznosa (konceptualno znanje) koje će učenici usvojiti tako da u primjerima zadataka zadanih riječima u različitim kontekstima prepoznaju navedene veličine (upute nastavnika, odgovori drugih učenika, rad u paru, rasprava). Nakon toga prikazuje se postupak izračuna postotka, postotnog iznosa ili osnovne vrijednosti što se mora dobro uvježbati

(proceduralno znanje). Učenici koji nisu dobro savladali korak prije (prepoznavanje tih veličina u tekstu) imat će problema s rješavanjem ovakvih zadataka.

U zadacima gdje se radi o poskupljenju ili sniženju cijene nekog proizvoda opet imamo konceptualno znanje (što znači poskupljenje za 15 % ili sniženje za 20 %) čije je dobro razumijevanje nužno za uspješno rješavanje zadataka iz svakodnevnog života (proceduralno znanje – dobro uvježbat). Na kraju dolaze zadatci u kojima se javljaju i sniženje i poskupljenje i to uglavnom stvara poteškoće većini učenika. Pogledajmo sljedeće zadatke i promislimo koliko je važan ovaj iterativni model razvoja proceduralnog i konceptualnog znanja o postotku i postotnom računu:

1. *Cijena hlača bila je 100 kn nakon čega su pojeftinile 10 %, a za mjesec dana poskupjele 10 %. Kolika je konačna cijena hlača?*

Čim postavimo ovo pitanje u razredu, učenici će bez puno razmišljanja reći da je cijena hlača 100 kn. Ali kada krenemo korak po korak, prvo izračunamo poskupljenje hlača, a zatim smanjimo novu cijenu, učenici polako počinju shvaćati u čemu je bit. Treba im naglasiti da je vrlo važno dobro odrediti osnovnu vrijednost u pojedinom koraku zadatka.

2. *Cijena bicikla je bila 1200 kn. Prvo je poskupio 30 %, a za dva mjeseca pojeftinio 10 %. Kolika je konačna cijena bicikla? Je li poskupio ili pojeftinio i za koliko?*

Učenici koji ne razumiju problem oduzet će postotke i zaključiti da je bicikl poskupio 20 % što nije točan odgovor. Bicikl je poskupio 17 %.

Provjeravanje proceduralnog i konceptualnog znanja

Proceduralno znanje provjerava se praćenjem izvođenja zadanog postupka pri čemu je naglasak na točnosti rješenja i brzini rješavanja zadataka. U hrvatskim udžbenicima i zbirkama zadataka prevladavaju takvi zadatci – zadatci zatvorenog tipa

bez konteksta s naglaskom na računanje i operiranje (Trupčević i Glasnović Gracin, 2014.). Stoga i u pisanim provjerama znanja također dominiraju takvi zadatci. Međutim i o zadacima za provjeru konceptualnog znanja u posljednje se vrijeme u Hrvatskoj više govori (Banić, 2013., Trupčević i Glasnović Gracin, 2014.).

Konceptualno se znanje može ispitivati na mnogo različitih načina. Hiebert i Lefevre (1986.) provjeravali su ga usmeno kako bi ispitali u kojoj su mjeri pojmovi, ideje i koncepti međusobno povezani, ali brojni su autori nakon njih počeli uvoditi neke nove specifične zadatke za provjeru konceptualnog znanja. Rittle-Johnson i Schneider (2013.) sistematiziraju tipove zadataka kojima se konceptualno znanje može provjeravati implicitno ili eksplicitno (tablica 2). Implicitno provjeravanje provodi se zadacima kategoričkog izbora (alternativnog, višestrukog), procjenama (procijeniti nepoznate postupke, procijeniti primjer nekog koncepta, procijeniti kvalitetu tuđeg odgovora), zadacima prevođenja iz jednog prikaza u drugi, uspoređivanjem količina, pronalaženjem prečica za dani postupak i sl. Eksplicitno mjerenje konceptualnog znanja uključuje provjeru poznavanja definicije, obrazloženje neke tvrdnje, izradu konceptualne mape i sl.

Još jedna bitna razlika između zadataka za provjeravanje ovih dviju vrsta znanja jest koliko su oni učenicima poznati od ranije. Proceduralno znanje u pravilu se provjerava zadacima kakve su učenici već prije vidjeli i njima slične rješavali. Konceptualno znanje se provjerava zadacima koji su učenicima novi, nepoznati, dotad neviđeni kako bi se doista ispitalo poznavanje koncepata, a ne naučenih pravila ili postupaka. Zanimljivo je primijetiti kako jedan te isti zadatak kod jednog učenika može provjeriti konceptualno, a kod drugog proceduralno znanje. Ako učenik nikada prije nije vidio takav ili sličan zadatak, pri rješavanju će do izražaja doći njegovo konceptualno znanje. Međutim, ako je učenik već rješavao takav ili slične zadatke, ne možemo biti sigurni provjeravamo li “poznatim” zadatkom konceptualno znanje (što nam je bila namjera), uvježbani postupak ili bez razumijevanja naučene činjenice.

Tablica 2. Izbor zadataka za provjeru konceptualnog znanja (Izvor: Rittle-Johnson i Schneider, 2013., str. 6,7)

Implicitna provjera konceptualnog znanja	
Tipovi zadataka	Primjeri
procijeniti nepoznati postupak	odlučiti je li korektno preskočiti neke korake pri računanju
procijeniti primjer zadanog koncepta	a) odlučiti ima li smisla jednakost $3 = 3$ b) ako znamo da je $45 + 39 = 84$, moramo li računati koliko je $39 + 45$
procijeniti kvalitetu odgovora drugih učenika	procijeniti nečije znanje na temelju grešaka koje se pojavljuju u računu
prevoditi količinu iz jednog prikaza u drugi	a) prikazati količinu s pomoću slika (piktograma) b) smjestiti simbolički prikazan broj na brojevni pravac
uspoređivati količine	pokazati koji je simbolički prikazan broj (cijeli ili racionalni) veći
pronaći prečicu za dani postupak	u zadatku poput $12 + 7 - 7$ odmah zaključiti da je odgovor 12 bez računanja
odrediti ključna svojstva	uspješno rekonstruirati primjer iz vlastite memorije (pod pretpostavkom da će veća razina konceptualnog znanja pomoći pri uočavanju ključnih obilježja promatranog objekta)
kategorizirati primjere	sortirati 12 zadanih problema na temelju procjene koji bi najbolje "išli zajedno"
Eksplicitna provjera konceptualnog znanja	
Tipovi zadataka	Primjeri
obrazložiti tvrdnju	na zadatku evaluacije pružiti ispravno objašnjenje izbora odgovora
formulirati ili odabrati definiciju koncepta	definirati znak jednakosti
obrazložiti zašto neki postupak funkcionira	obrazložiti zašto smijemo "posuđivati" kod oduzimanja
izraditi konceptualnu mapu	izraditi mapu koja prikazuje osnovne koncepte te veze među njima

Ovome popisu različitih tipova zadataka dodali bismo još neke već ranije opisane u našem MIŠ-u. Sonja Banić (MIŠ br. 69) prikazala je izvrsne primjere zadataka kojima možemo provjeriti konceptualno razumijevanje pojma funkcije i grafa funkcije. Njen je prijedlog ponuditi učenicima nekoliko tvrdnji vezano uz eksplicitno zadanu funkciju (linearnu, kvadratnu, logaritamsku...) i prikazan graf, tražiti od učenika da odgovore je li tvrdnja točna ili netočna te da obrazlože svoj odgovor. Goran Trupčević i Dubravka Glasnović Gracin (MIŠ br. 74)

govore o potrebi uvođenja uvjetnih rečenica, odnosno pitanja "Što bi bilo kad bi...?" čime se od učenika očekuje da provedu mali mentalni eksperiment upravo s ciljem razvijanja i osvještavanja njihovog konceptualnog znanja.

Sljedeći primjer prikazuje različite tipove pitanja i zadataka koja se mogu vezati uz grafički i tablični prikaz podataka. Promislite koji će od navedenih zadataka provjeravati konceptualno, a koji proceduralno znanje vaših učenika.

Primjer 4. Grafičko prikazivanje podataka.

Dijagram na slici prikazuje količinu (u kg) prodanog povrća povrtlara u jednom danu na tržnici, a tablica prikazuje cijene povrća.



Povrće	Cijena za 1 kg
poriluk	8 kn
salata	7 kn
cvjetača	12 kn
paprika	11 kn
rajčica	9 kn

Prema podacima iz dijagrama i/ili tablice riješi sljedeće zadatke:

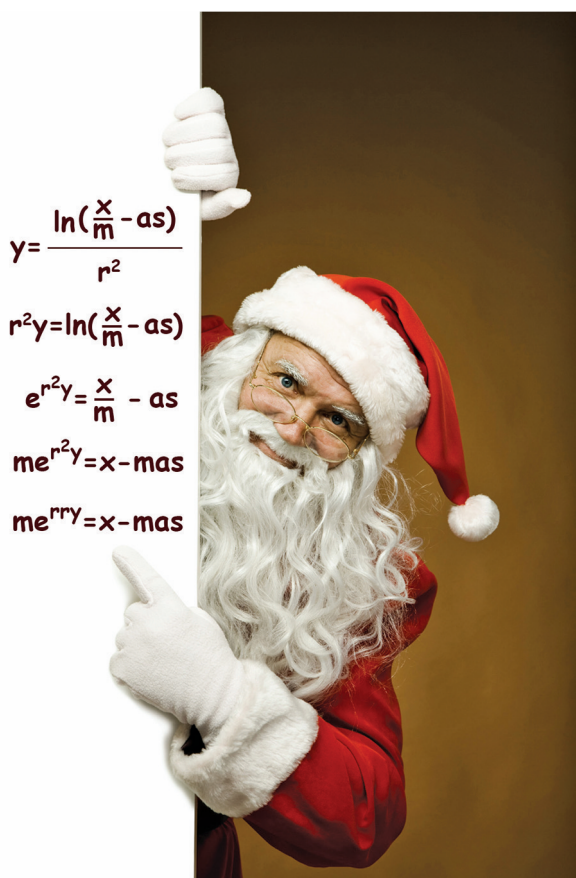
1. Kako se zove dijagram u kojem su prikazani podaci?
2. Koliko je ukupno kilograma povrća prodano u jednom danu na tržnici?
3. Ako se povrće s parkirališta do tržnice prevozi u kolicima nosivosti 25 kg, koliko će puta povrtlar morati prevoziti povrće u kolicima?
4. Izračunaj ukupnu zaradu povrtlara.
5. Koje je povrće najprodavanije?
6. Koje je povrće najjeftinije?

7. Kojeg povrća je prodano manje od 16 kg?
8. Razmisli! Ako imaš 40 kn koje povrće i koliko bi kupio?
9. Izradi tablicu relativnih frekvencija prodanog povrća.
10. Nacrtaj kružni dijagram relativnih frekvencija prodanog povrća.
11. Ako ● označava 4 kg rajčica, a ✱ 3 kg salate, prikaži piktogramom prodanu količinu rajčica i salate toga dana.
12. Poredaj navedeno povrće po ukupnoj zaradi toga dana za to povrće.
13. Ako je povrtlar prodao još i 20 kg krastavaca, dopuni zadani dijagram tim podatkom.
14. Što će kupac više platiti, 5 kg salate ili 8 kg cvjetače?
15. Da je povrtlar prodavao poriluk po cijeni za 1 kn skuplje, a salatu za 1 kn jeftinije, bi li zaradio više ili manje i za koliko? Pokušaj zadatak riješiti bez računanja, samo procjenom na temelju grafikona.
16. Za svaku tvrdnju u tablici odredi je li točna ili netočna i obrazloži svoj odgovor:

Tvrdnja	T/N	Obrazloženje
Rajčica je najskuplja.		
Ukupna zarada na salati je 105 kn.		
Ako imam 10 kn mogu kupiti kilogram cvjetače.		
Da je paprika prodavana po cijeni za 1 kn skuplje po kg, povrtlar bi zaradio 18 kn više.		
Poriluka je prodano dvostruko manje nego rajčice.		

Zaključak

Dosadašnja praksa nastave matematike u Hrvatskoj pokazuje kako je naglasak uglavnom na proceduralnom znanju, dok se ono konceptualno uzima "zdravo za gotovo" i na neki način zapostavlja. Općepoznata je činjenica da učenici uče kako ih se ispituje. Dakle, ako se od njih traži rješavanje zadataka zatvorenoga tipa u kojima se očekuje točno izvođenje postupaka rješavanja zadatka te precizno i jednoznačno dobiveno rješenje, onda će oni takvu (proceduralnu) matematiku učiti. U ovom radu pokušali smo prikazati koliko je bitno i konceptualno znanje matematike. Ono je, uz poznavanje pravila i postupaka, nužno za rješavanje složenijih matematičkih problema i zadataka otvorenoga tipa kakvi se susreću u svakodnevnom životu.



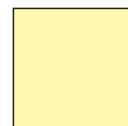
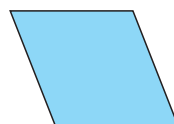
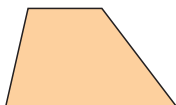
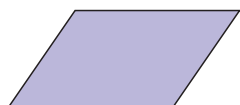
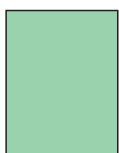
Stoga predlažemo postupno uvođenje promjena u načine poučavanja, ali i načine provjeravanja znanja (jer će učiti kako ih pitamo). Na nastavi bi trebalo više inzistirati na pitanju "zašto?" pri rješavanju zadataka i općenito na verbalnoj matematičkoj komunikaciji u razredu. U pisane provjere znanja trebalo bi uvoditi nove tipove zadataka kojima bi se uz dosadašnje proceduralno provjeravalo i konceptualno znanje učenika. U prilog ovome radu donosimo primjer pisane provjere znanja za nastavnu cjelinu četverokuti u 6. razredu osnovne škole (uočite da prvih 6 zadataka provjerava konceptualno znanje učenika).

LITERATURA

- 1/ S. Banić, (2013.), *Funkcija i njen graf: razmisli, poveži, obrazloži!*, Matematika i škola, 69, 16–164.
- 2/ A. J. Baroody, Y. Feil, A. R. Johnson, (2007.), *An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge*, Journal for Research in Mathematics Education, 38(2), 115–131.
- 3/ L. Haapasalo, D. Kadijevich, (2000.), *Two types of mathematical knowledge and their relation*, Journal für Mathematik-Didaktik, 21(2), 139–157.
- 4/ J. Hiebert, P. Lefevre, (1986.), *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, U: J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (1–27)*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- 5/ NCTM (2000.), *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- 6/ B. Rittle-Johnson, M. Schneider, (2013.), *Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics*, U: R. Cohen Kadosh, A. Dowker (eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*, Oxford University Press.
- 7/ B. Rittle-Johnson, R. S. Siegler, M. W. Alibali, (2001.), *Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process*, Journal of Educational Psychology, 93(2), 346–362.
- 8/ J. R. Star (2000.), *On the relationship between knowing and doing in procedural learning*, U: B. Fishman, S. O'Connor-Divelbiss (eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences (80–86)*, Mahwah, NJ: Erlbaum.
- 9/ G. Trupčević, D. Glasnović Gracin (2014.), *"Što bi bilo kad bi...?"*, Matematika i škola, 74, 147–154.

Pisana provjera znanja za 6. razred: Četverokuti

1. Ispod svakog lika zapiši slovo koje opisuje njegovo svojstvo (jedan lik može imati više navedenih svojstava, pobroji ih sve):
- lik je paralelogram
 - nasuprotne stranice jednake su duljine
 - susjedne stranice su okomite
 - dijagonale su jednake duljine
 - lik ima točno jedan par paralelnih stranica
 - dijagonale su okomite
 - ako je duljina jedne stranice a , opseg lika je $4a$.



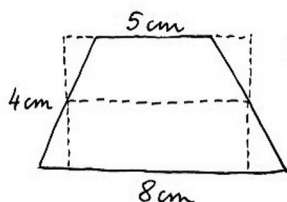
2. U lijevom stupcu navedeni su četverokuti, a u desnom veličine unutarnjih kutova. Kojem četverokutu odgovaraju koje od navedenih veličina kutova (spari ponuđene odgovore)?

kvadrat •	• $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$
paralelogram •	• $50^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 120^\circ$
trapez •	• $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$
ne postoji takav četverokut •	• $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$

3. Dopuni rečenice:
- Zbroj unutarnjih kutova četverokuta je _____.
 - Dijagonala paralelograma dijeli paralelogram na _____.
 - Udaljenost između osnovica trapeza zove se _____.
 - Središte opisane kružnice kvadrata je _____.
4. Ako jednu stranicu pravokutnika produljimo za 2 cm, a drugu skratimo za 2 cm, dobit ćemo novi geometrijski lik.
- Koji je to lik?
 - Kako će to utjecati na opseg dobivenog lika? Hoće li biti jednak, veći ili manji od opsega pravokutnika?
5. Ako jedan kut pravokutnika povećamo za 10° , a drugi njemu susjedni smanjimo za 10° , dobit ćemo novi geometrijski lik.
- Koji je to lik?
 - Kako će to utjecati na površinu dobivenog lika? Hoće li biti jednaka, veća ili manja od površine pravokutnika?

6. Zadan je zadatak "Osnovice trapeza su duljina 8 cm i 5 cm, a duljina visine je 4 cm. Kolika je površina trapeza?"

Ana je zadatak riješila ovako:



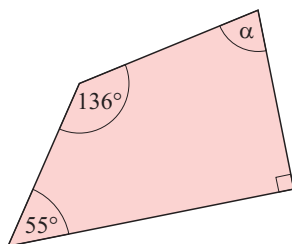
$$\frac{8+5}{2} = 6.5 \text{ cm}$$

Površina trapeza jednake je površini pravokutnika sa stranicama 6.5 cm i 4 cm.

$$P = 26 \text{ cm}^2$$

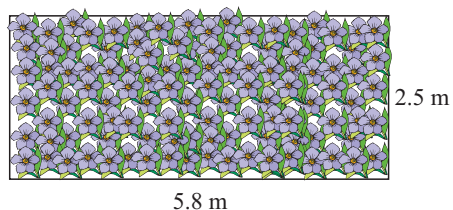
Je li Ana točno riješila zadatak? Obrazloži svoj odgovor!

7. Izračunaj nepoznati kut četverokuta sa slike.

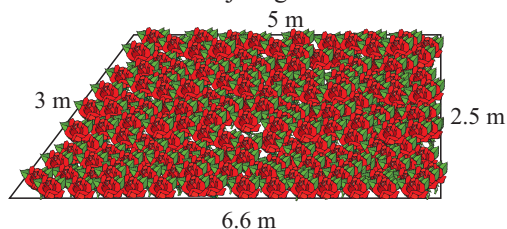


8. Ako je u paralelogramu jedan kut jednak 56° , kolike su mjere preostalih kutova?
9. Izračunaj duljinu stranice paralelograma kojemu je duljina visine na tu stranicu 26 cm, a površina paralelograma je 6.5 dm^2 .
10. Kolika je površina trapeza kojemu su duljine osnovica 4 cm i 7.7 cm, a visina 5 cm?
11. Djevojčice Maja i Janja imaju svaka svoju gredicu s cvijećem oblika i veličina kao na slici:

Majina gredica



Janjina gredica



- a) Koja djevojčica ima gredicu veće površine?
- b) Koja će djevojčica morati napraviti dužu ogradu kako bi ogradila gredicu?
- c) Ako Maja na 1 m^2 može posaditi 8 lukovica, koliko će joj lukovica trebati da zasadi cijelu gredicu?