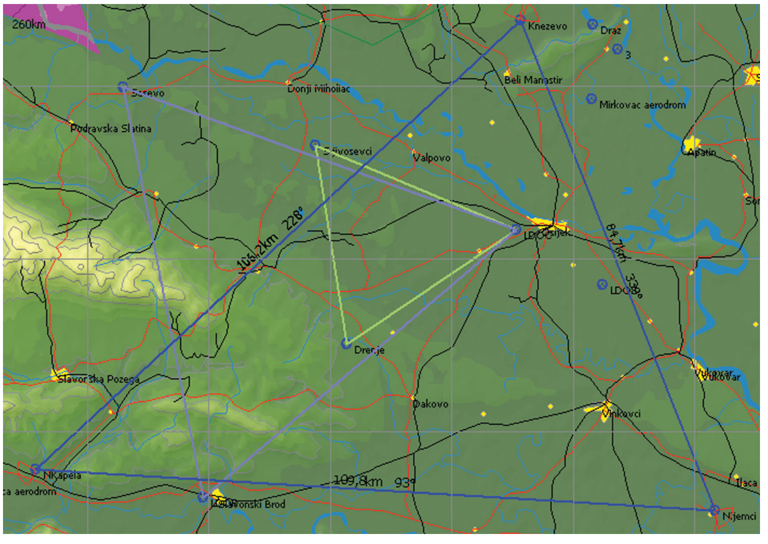
Podudaranje
karakterističnih točaka trokuta



Anita Bingula
i Maja Starčević, Zagreb

U radu ćemo pokazati da u trokutu koji nije jednakostraničan ne postoje dvije, od četiriju karakterističnih točaka, koje se mogu podudarati. Analogne tvrdnje vrijede i za neke druge zanimljive točke trokuta.

Četiri karakteristične točke trokuta su težište, ortocentar, te središta trokutu upisane i opisane kružnice. Poznata je činjenica da se kod jednakostraničnog trokuta te četiri točke podudaraju. Pitamo se vrijedi li obrat. Pretpostavimo li da se sve četiri karakteristične točke trokuta podudaraju, možemo dokazati da je trokut nužno jednakostraničan. Prilikom dokazivanja te tvrdnje može se primijetiti da ne moramo iskoristiti uvjet da se baš sve četiri točke podudaraju, već zaključak slijedi i iz činjenice da se samo neke od njih podudaraju.

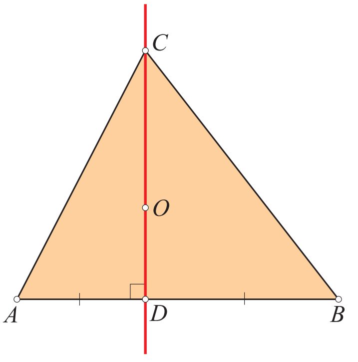
U nastavku ćemo pretpostaviti da se samo po dvije od tih točaka podudaraju i da je zaključak u svakom slučaju jednak – trokut može biti samo jednakostraničan. Primijetimo da imamo ukupno šest takvih parova točaka.

Za početak ćemo pokazati da se težište trokuta može podudarati s nekom od ostalih triju karakterističnih točaka jedino u slučaju kad je trokut jednakostraničan. U dokazima krećemo uvijek od činjenice da se težište svakog trokuta nalazi unutar trokuta. Imamo sljedeći niz tvrdnji.

Teorem 1. Ako je točka O i težište i ortocentar trokuta ABC, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Neka je točka D sjecište pravca CO sa stranicom $\overline{AB}$. Kako je O težište zadanog trokuta, D je polovište stranice $\overline{AB}$, odnosno $|AD| = |BD|$. S obzirom na to da je O i ortocentar trokuta ABC, D je i nožište visine trokuta ABC iz vrha C. Prema tome, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90°$ pa su trokuti ADC i BDC sukladni te je $|AC| = |BC|$ (slika 1). Na isti način, s pomoću sjecišta pravca AO i stranice $\overline{BC}$, možemo doći i do jednakosti $|AB| = |AC|$ i dobivamo da je trokut ABC jednakostraničan. ■

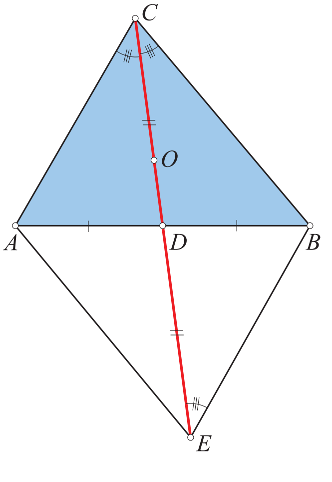
Anita Bingula, Srednja škola Zlatar, `abingula@gmail.com`
doc. dr. sc. Maja Starčević, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, `mstarcev@math.hr`



Slika 1.

Teorem 2. Ako je točka O i težište trokuta ABC i središte njemu upisane kružnice, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Neka je D sjecište pravca CO i stranice $\overline{AB}$. Kako je O težište trokuta ABC, točka D je polovište stranice $\overline{AB}$. Budući da je O i središte trokutu ABC upisane kružnice, pravac CO je simetrala $\sphericalangle ACB$. Tada je $|AD| = |BD|$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Nadopunimo trokut ABC do paralelograma $AEBC$ (slika 2). Pritom D raspolavlja dijagonale tog paralelograma. Također je i $\sphericalangle CEB = \sphericalangle ECA = \sphericalangle ECB$. Kako je D polovište dužine $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ je visina jednakokračnog trokuta CEB. Dakle, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90°$ i konačno možemo zaključiti da su trokuti ACD i BCD sukladni, odnosno da vrijedi $|AC| = |BC|$. Analogno se dokazuje i jednakost $|AB| = |AC|$. Prema tome, zadani trokut ABC je jednakostraničan. ■



Slika 2.

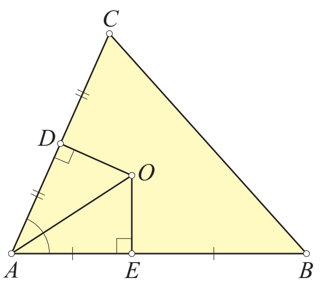
Teorem 3. Ako je točka O i težište trokuta ABC i središte trokutu ABC opisane kružnice, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Neka je točka D presjek pravca CO i stranice $\overline{AB}$. S obzirom na to da je O težište trokuta ABC, točka D je polovište stranice $\overline{AB}$. Kako je O središte trokutu ABC opisane kružnice, točka O leži na simetrali stranice $\overline{AB}$. Dakle, pravac OD je okomit na pravac AB, odnosno težišnica $\overline{CD}$ trokuta ABC je ujedno i njegova visina (slika 1). Tada kao i u teoremu 1 možemo zaključiti da je $|AC| = |BC|$. Analogno se dokazuje da je $|AB| = |AC|$. ■

Isti zaključak slijedi i ako se podudaraju ostali parovi karakterističnih točaka što ćemo pokazati u nastavku.

Teorem 4. Ako je točka O i središte trokutu ABC opisane kružnice i središte njemu upisane kružnice, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. S obzirom na to da se središte trokutu upisane kružnice mora nalaziti unutar trokuta, točka O je unutar trokuta ABC. Neka su točke D i E redom nožišta okomica iz točke O na stranice $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Kako je O središte opisane kružnice trokuta ABC, zaključujemo da se točke D i E nalaze na simetralama stranica trokuta ABC, odnosno, one su polovišta odgovarajućih stranica tog trokuta (slika 3). Također je $\sphericalangle ODA = \sphericalangle OEA = 90°$. Kako je O središte trokutu ABC upisane kružnice, pravac AO je simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ te vrijedi $\sphericalangle DAO = \sphericalangle EAO$. Dakle, trokuti ADO i AEO imaju jednu zajedničku stranicu i odgovarajući kutovi su im jednaki. Prema tome, oni su i sukladni, odnosno $|AD| = |AE|$. S obzirom na to da su D i E polovišta stranica zadanog trokuta, vrijedi i $|AB| = |AC|$. Analogno se dokazuje i jednakost $|AB| = |BC|$ pa je trokut ABC jednakostraničan. ■



Slika 3.

Teorem 5. Ako je točka O i središte trokutu ABC opisane kružnice i njegov ortocentar, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. U ovom slučaju ne možemo odmah zaključiti nalazi li se točka O unutar ili izvan zadanog trokuta.

Neka je za početak trokut ABC tupokutan. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\overline{AB}$ najdulja stranica trokuta. Tada se i središte opisane kružnice i ortocentar nalaze izvan trokuta ABC, ali s različitih strana pravca AB. Dakle, središte opisane kružnice i ortocentar se u ovom slučaju ne mogu podudarati.

Ako je trokut ABC pravokutan, ortocentar mu se nalazi u vrhu pravog kuta, a središte opisane kružnice na hipotenuzi pa se te dvije točke opet ne mogu podudarati.

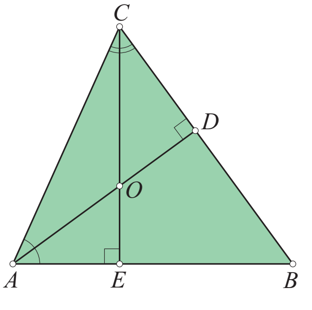
Pretpostavimo sada da je trokut ABC šiljastokutan. Tada je točka O unutar trokuta ABC. Neka je točka D presjek pravca CO i stranice $\overline{AB}$. Kako je O ortocentar trokuta ABC, $\overline{CD}$ je njegova visina. S obzirom na to da je O i središte opisane kružnice trokuta ABC, visina $\overline{CD}$ nalazi se na simetrali stranice $\overline{AB}$, odnosno ona je ujedno i težišnica zadanog trokuta (slika 1). Kao i u dokazu teorema 1 slijedi da je $|AC| = |BC|$ i zatim analogno dokazujemo da je $|AB| = |BC|$. Prema tome, trokut ABC je jednakostraničan. ■

Teorem 6. Ako je točka O i središte trokutu ABC upisane kružnice i ortocentar, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Neka su točke D i E sjecišta pravaca AO i CO sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$. Točka O je ortocentar trokuta ABC pa su dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$ visine trokuta ABC. S obzirom na to da je O i središte trokutu ABC upisane kružnice, pravci na kojima leže te visine su simetrale pripadnih kutova trokuta ABC (slika 4). Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$. Iz pravokutnih trokuta ACE i ABD dobivamo

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ,$$
$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ.$$

Ako od jednakosti $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ oduzmemo prethodne dvije jednakosti, dobivamo $\alpha = \beta = \gamma$ pa je trokut ABC jednakostraničan. ■



Slika 4.

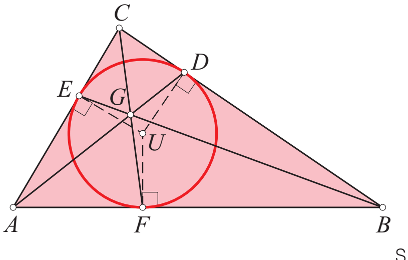
U nastavku ćemo pokazati da postoje i neke druge specifične točke trokuta koje se ne mogu podudarati s nekom od četiriju karakterističnih točaka trokuta, osim u slučaju da je trokut jednakostraničan. Upoznajmo jednu od njih. Možda je manje poznato da se i pravci koji u trokutu spajaju vrhove trokuta s diralištem trokutu upisane kružnice na nasuprotnoj stranici sijeku u jednoj točki. Tu tvrdnju je lako dokazati uz pomoć **Cevina teorema** (v. [2]).

Naime, neka je zadan trokut ABC i neka su točke D, E i F dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Označimo sa U središte trokutu ABC upisane kružnice (slika 5). Kako je $\sphericalangle EAU = \sphericalangle FAU$ i $|UE| = |UF|$, pravokutni trokuti AEU i AFU su sukladni pa je $|AE| = |AF|$. Analogno imamo i $|BF| = |BD|$ i $|CD| = |CE|$. Tada je

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

pa se prema Cevinu teoremu dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki.

Točku u kojoj se sijeku navedene dužine zovemo **Gergonneova točka**. Ona se u jednakostraničnom trokutu podudara s četirima karakterističnim točkama trokuta. Na slici 5 je prikazana Gergonneova točka G trokuta ABC.

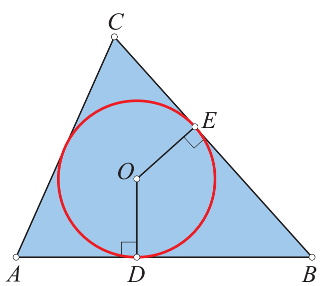


Slika 5.

Sada možemo dokazati analogne tvrdnje i za ovu točku, izjednačavajući je s četirima karakterističnim točkama. U svakom od dokaza krećemo od očite činjenice da se Gergonneova točka trokuta uvijek nalazi unutar danog trokuta.

Teorem 7. Ako je točka O i Gergonneova točka trokuta ABC i središte trokutu ABC upisane kružnice, tada je trokut ABC jednakostraničan.

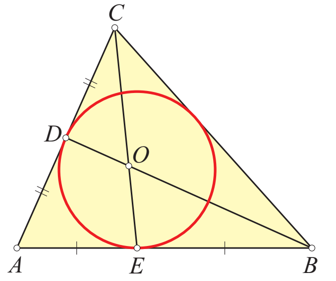
Dokaz. Neka su točke D i E dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Kako je O središte trokutu ABC upisane kružnice, vrijedi da je $OD \perp AB$ (slika 6). S obzirom na to da je O Gergonneova točka trokuta ABC, O pripada dužini $\overline{CD}$ pa zaključujemo da je $CD \perp AB$, odnosno $\overline{CD}$ je visina trokuta ABC. Analogno se vidi i da je $\overline{AE}$ visina trokuta ABC. Visine $\overline{CD}$ i $\overline{AE}$ se sijeku u točki O pa je O ortocentar trokuta ABC. Prema tome, središte upisane kružnice trokuta ABC se podudara s njegovim ortocentrom pa iz teorema 6 dobivamo da je trokut ABC jednakostraničan. ■



Slika 6.

Teorem 8. Ako je točka O i Gergonneova točka i težište trokuta ABC, tada je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Neka su točke D i E dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Kako dužina $\overline{BD}$ prolazi kroz Gergonneovu točku O, koja je i težište trokuta ABC, dužina $\overline{BD}$ je težišnica trokuta ABC. Analogno se vidi i da je $\overline{CE}$ njegova težišnica (slika 7). Neka je U središte trokutu ABC upisane kružnice. Tada je AU simetrala $\sphericalangle CAB$, odnosno $\sphericalangle UAD = \sphericalangle UAE$. S obzirom na to da je i $|UD| = |UE|$, pravokutni trokuti ADU i AEU su sukladni pa je $|AD| = |AE|$. Kako su D i E polovišta stranica trokuta ABC, vrijedi i $|AB| = |AC|$.



Slika 7.

Analogno se dokazuje jednakost $|AB| = |BC|$ pa je trokut ABC jednakostraničan. ■

Teorem 9. Ako je točka O i Gergonneova točka trokuta ABC i središte trokutu ABC opisane kružnice, tada je trokut ABC jednakostraničan.

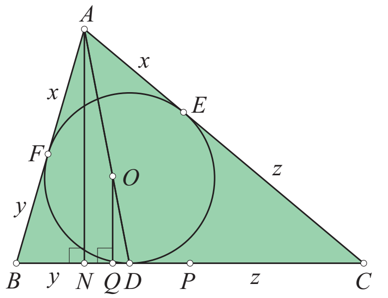
Dokaz. Pretpostavimo za početak da je $|AB| < |AC|$. Neka su točke D, E i F dirališta upisane kružnice trokuta ABC na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Označimo $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$ te $|AF| = |AE| = x$, $|BF| = |BD| = y$, $|CE| = |CD| = z$. Tada je

$$x + y = c\,, \quad y + z = a\,, \quad x + z = b.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$$

pa je $y = \frac{a-b+c}{2}$. Kako je $c < b$, imamo $\frac{a-b+c}{2} < \frac{a}{2}$, odnosno $|BD| < |BP|$, gdje je P polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je N nožište visine trokuta ABC iz vrha A. Zbog $c < b$ je očito i $|BN| < |BP|$. S obzirom na to da je O Gergonneova točka trokuta ABC, ona pripada dužini $\overline{AD}$. Neka je Q nožište okomice iz O na $\overline{BC}$. Tada je $Q \in \overline{ND}$ (slika 8).

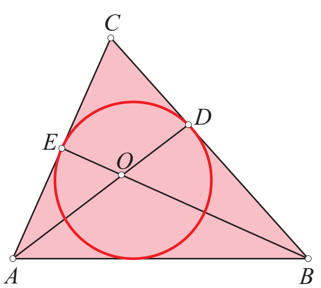


Slika 8.

Kako je $|BN| < |BP|$ i $|BD| < |BP|$, vrijedi i nejednakost $|BQ| < |BP|$. Međutim, budući da je O središte trokutu ABC opisane kružnice, znamo da je nožište okomice iz O na $\overline{BC}$ točka P. Dakle, pretpostavka $|AB| < |AC|$ dovodi do kontradikcije. Na sličan način dolazimo do kontradikcije uz pretpostavku $|AB| > |AC|$. Dakle, može vrijediti samo $|AB| = |AC|$. Analogno se dokazuje i da je $|AB| = |BC|$ i time smo dokazali da je trokut ABC jednakostraničan. ■

Teorem 10. Ako je točka O i Gergonneova točka i ortocentar trokuta ABC, tada je trokut ABC jednakostraničan.

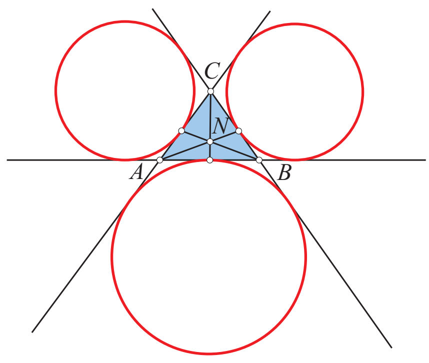
Dokaz. Neka su točke D i E dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Tada dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ prolaze kroz Gergonneovu točku O (slika 9) koja je ujedno i ortocentar trokuta ABC, odnosno $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ su visine trokuta ABC. Zato imamo da je $DO \perp BC$ i $EO \perp AC$. Zaključujemo da je O ujedno i središte trokutu ABC upisane kružnice pa tvrdnja teorema slijedi prema teoremu 7. ■



Slika 9.

Još jedna zanimljiva točka trokuta je **Nagelova točka**. To je točka u kojoj se sijeku dužine koje spajaju vrhove trokuta s diralištem trokutu pripisane kružnice na nasuprotnoj stranici. Ta činjenica se također može dokazati s pomoću Cevina teorema (v. [1]). Na slici 10 vidimo Nagelovu točku N trokuta ABC. U jednakostraničnom trokutu Nagelova točka se podudara s četirima karakterističnim točkama i s Gergonneovom točkom.

Dokažimo za kraj da se težište trokuta može podudarati s Nagelovom točkom trokuta jedino u slučaju da je zadani trokut jednakostraničan. Neka je O i težište i Nagelova točka trokuta ABC. Označimo s D diralište pripisane kružnice trokuta ABC sa stranicom $\overline{BC}$.

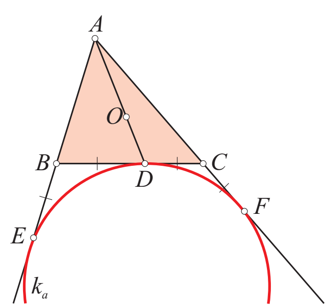


Slika 10.

Tada dužina $\overline{AD}$ prolazi kroz Nagelovu točku O koja je ujedno i težište trokuta ABC pa je $\overline{AD}$ težišnica trokuta ABC (slika 11). Drugim riječima, $|BD| = |DC|$. Neka je k_a pripisana kružnica trokuta ABC uz stranicu $\overline{BC}$ i neka su E i F dirališta produžetaka stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ s kružnicom k_a. Kako je D diralište stranice $\overline{BC}$ sa k_a, vrijedi $|BD| = |BE|$ i $|CD| = |CF|$. S obzirom na to da su točke E i F i dirališta tangenata iz A na kružnicu k_a, imamo $|AE| = |AF|$, odnosno

$$|AB| + |BE| = |AC| + |CF|.$$

Kako je $|BE| = |BD| = |CD| = |CF|$, slijedi $|AB| = |AC|$. Potpuno analogno dokazujemo i da je $|AB| = |BC|$ pa je trokut ABC jednakostraničan.



Slika 11.

LITERATURA

1/ A. Bingula, *Karakteristične točke trokuta*, Diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2015.

2/ D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 2004.