...ili kongruencije

Blanka Iličić, Bjelovar

Ponekad u razredu dobijemo od učenika različite načine rješavanja pojedinog zadataka. Naravno, nas nastavnike to posebno veseli jer ta različitost potvrđuje zainteresiranost učenika i njihovo snalaženje u problemskim situacijama.

Željela bih stoga pokazati mogućnost rješavanja nekih zadataka korištenjem kongruencije, koja se istina ne radi na redovnoj nastavi, ali može malo "osvježiti" program.

Prije samog zadatka samo ću se ukratko osvrnuti na definiciju kongruencije i neke osnovne tvrdnje. Tvrdnje se jednostavno dokazuju korištenjem definicije djeljivosti.

- *Definicija kongruencije:* Ako su $a, b \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$ i ako $m|(a-b)$, onda kažemo da su a i b kongruentni modulo m i to zapisujemo $a \equiv b \pmod{m}$.
- *Teorem:* Neka su a, b, c, d cijeli, a m prirodni broj. Ako je $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, onda je

$$\begin{aligned}(a+c) &\equiv (b+d) \pmod{m},\\ ac &\equiv bd \pmod{m} \ \text{ i}\\ ka &\equiv kb \pmod{m},\end{aligned}$$

za svaki cijeli broj k.

- *Teorem*: Neka su a i b cijeli, a m prirodni broj. Brojevi a i b daju isti ostatak pri dijeljenju brojem m ako i samo ako je $a \equiv b \pmod{m}$.

Zadatak. *Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ djeljiv sa 31.*

Rješenje. Kako, dakle isti zadatak riješiti na četiri različita načina?

Blanka Iličić, prof. savjetnica, Gimnazija Bjelovar, Bjelovar, `blankailicic@gmail.com`

1) Rastavljanje na faktore:

$$\begin{aligned}6^{2n+1}+5^{n+2}&=6\cdot 36^n+25\cdot 5^n\\&=31\cdot 36^n-25\cdot 36^n+25\cdot 5^n\\&=31\cdot 36^n-25\cdot(36^n-5^n)\\&=31\cdot 36^n-25(36-5)(36^{n-1}\\&\quad+36^{n-2}\cdot 5+36^{n-3}\cdot 5^2+\ldots+5^{n-1})\\&=31[36^n-25(36^{n-1}+36^{n-2}\cdot 5\\&\quad+36^{n-3}\cdot 5^2+\ldots+5^{n-1})].\end{aligned}$$

Dakle, prvobitni izraz smo napisali kao umnožak faktora 31 i cijelog broja, pa je izraz $6^{2n+1}+5^{n+2}$ djeljiv sa 31. Pritom smo se koristili formulom

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

koja vrijedi za svaka dva realna broja a i b i prirodni broj n.

2) Matematička indukcija:

1° Provjerimo vrijedi li baza indukcije, tj. vrijedi li tvrdnja za $n=1$:

$$6^3+5^3=341=11\cdot 31.$$

Dakle, za $n=1$ dobili smo broj djeljiv sa 31, pa vrijedi baza indukcije.

2° Pretpostavimo da 31 dijeli broj $6^{2n+1}+5^{n+2}$ za neki prirodni broj n, tj. da je $6^{2n+1}+5^{n+2}=31k$.

3° Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedbenik broja n iz 2°. Ovaj se dio dokaza naziva korak indukcije.

$$\begin{aligned}6^{2(n+1)+1}+5^{(n+1)+1}&=6^{2n+2+1}+5^{n+1+2}\\&=36\cdot 6^{2n+1}+5\cdot 5^{n+2}\\&=36(6^{2n+1}+5^{n+2})-31\cdot 5^{n+2}\\&=36\cdot 31k-31\cdot 5^{n+2}\\&=31(36k-5^{n+2}).\end{aligned}$$

Prema aksiomu matematičke indukcije promatrana tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

3) Binomni poučak:

$$\begin{aligned}6^{2n+1}+5^{n+2}&=6\cdot 36^n+25\cdot 5^n\\&=6(124-88)^n+25(93-88)^n\\&=6\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}124^{n-k}\cdot(-88)^k\right)\\&\quad+25\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}93^{n-k}\cdot(-88)^k\right)\\&=6\left(\binom{n}{0}124^n+\binom{n}{1}124^{n-1}\cdot(-88)+\ldots\right.\\&\quad\left.+\binom{n}{n-1}124\cdot(-88)^{n-1}+\binom{n}{n}(-88)^n\right)\\&\quad+25\left(\binom{n}{0}93^n+\binom{n}{1}93^{n-1}\cdot(-88)+\ldots\right.\\&\quad\left.+\binom{n}{n-1}93\cdot(-88)^{n-1}+\binom{n}{n}(-88)^n\right).\end{aligned}$$

U oba ova razvoja svi su članovi osim posljednjeg djeljivi s 31. Zbroj posljednja dva $6\cdot\binom{n}{n}(-88)^n+25\cdot\binom{n}{n}(-88)^n=31\cdot(-88)^n$ je djeljiv sa 31, što znači da je i cjelokupni zbroj djeljiv sa 31.

4) Kongruencije:

$$\begin{aligned}6^{2n+1}+5^{n+2}&=6\cdot 36^n+25\cdot 5^n\\&\equiv(-25)\cdot 5^n+(-6)\cdot 5^n\ (\text{mod } 31)\\&=-31\cdot 5^n\equiv 0\cdot 5^n\ (\text{mod } 31)\equiv 0\ (\text{mod } 31).\end{aligned}$$

Dakle $6^{2n+1}+5^{n+2}\equiv 0\ (\text{mod } 31)$, pa je 31 djelitelj broja $6^{2n+1}+5^{n+2}$.

Sam zadatak možete kreirati i sami, kao što sam i ja učinila koristeći se tvrdnjom da je $(p+1)^{2k+1}+p^{k+2}$ djeljivo sa (p^2+p+1) ako su p i k prirodni brojevi. Svakako dokazom provjerite tu tvrdnju!