Kad 3D pisači
slijede matematičku maštu

Šime Šuljić, Pazin

Koliko vam se puta u životu dogodilo da vas je netko kao matematičke znalce zatražio pomoć ali ne u vezi svojih školskih ili fakultetskih zadataka, nego u vezi nečega što rabi u svakodnevnom životu ili poslu? Ako izuzmemo postotke, razlomke i koji jednostavniji računski algoritam onda osobno baš i nisam imao nekih ozbiljnijih upita.

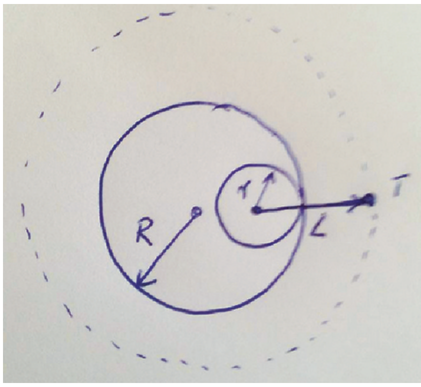
Prisjećam se da su me pitali kako odrediti anuitet kredita, kut nagiba krova, središte kružnog luka, kako upisati elipsu zadanom pravokutniku. . . i možda još štogod što se može vrlo brzo odgovoriti. Jedino pitanje koje je tražilo malo složeniji odgovor i pobudilo moje zanimanje primio sam jesenas u porukama Twittera ograničenim na 140 znakova:

> Šime, imam jedan inženjersko matematički problem, moram odabrati optimalnu krivulju jednog sustava sa zupčanicima.

19 Sep 2015

> Čini mi se da bi mi *GeoGebra* mogla pomoći najbrže, ako imate vremena baciti pogled na problem.

19 Sep 2015



> Dakle imam veliki zupčanik radijusa R, unutar njega je manji zupčanik radijusa r.

> U centru manjeg zupčanika nalazi se učvršćena poluga duljine L. Na vrhu poluge je točka T.

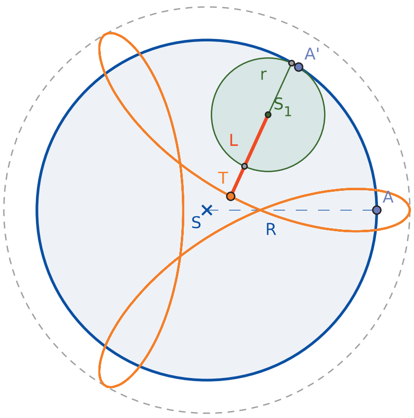
Šime Šuljić, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile, Pazin, sime.suljic@pu.htnet.hr

Mene zanima putanja točke T, u ovisnosti o R, r i L. Mislim da bi *GeoGebra* mogla to nacrtati.

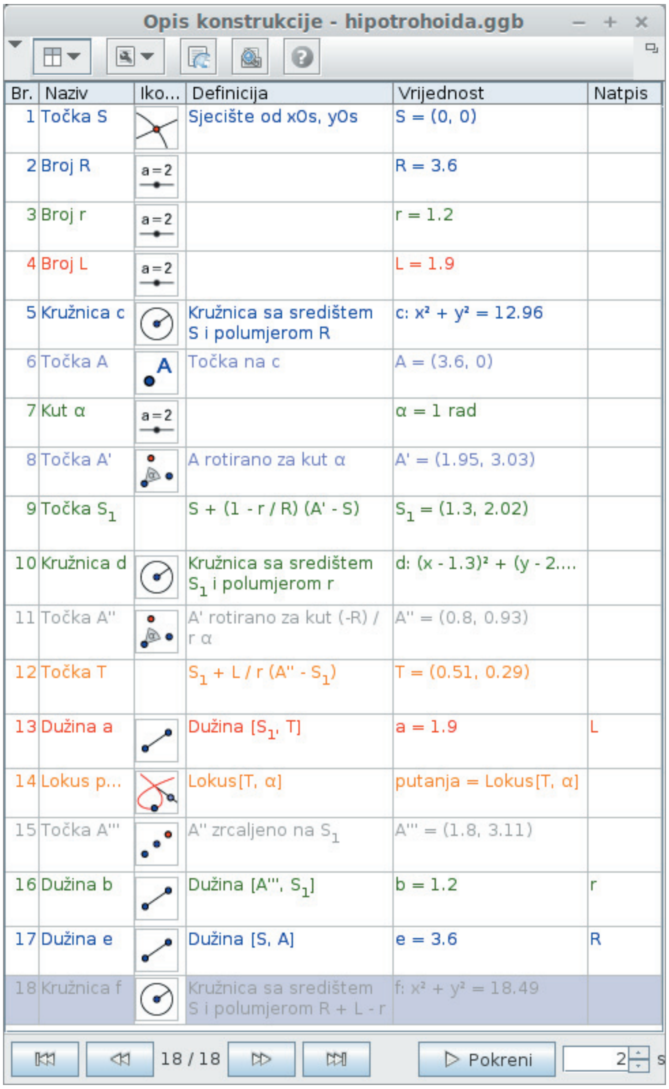
19 Sep 2015

Prava poslastica za *GeoGebru*, jer ne samo da je takvu krivulju moguće konstruirati s varijabilnim parametrima bez jednadžbe, nego će biti vrlo lako eksperimentirati varirajući ulazne parametre da se dobije željena krivulja, a da pritom udaljeni korisnik ne mora ništa instalirati na svoje računalo nego štoviše zahvaljujući servisu *Geogebra-Tube* sve to može i putem svog pametnog telefona. Ovaj upit mog znanca bio je još po nečemu poseban: nije bila riječ samo o teorijskom pitanju, nego o namjeri da se takav mehanizam izradi uz pomoć 3D printera, za manju miješalicu kojom će se miješati razne smjese.

Ono što se ovdje traži zapravo je **hipotrohoida**, ravninska krivulja koju opisuje točka T čvrsto vezana s kružnicom polumjera r, koja se kotrlja po drugoj nepokretnoj kružnici polumjera R s njezine unutarnje strane. Grčki $\iota\pi\upsilon$ – pod, ispod i $\tau\rho o\chi o\epsilon\varsigma\delta\eta\varsigma$ – koji ima oblik kotača, okrugao. Točka T nalazi se u traženom slučaju izvan kotrljajuće kružnice, a kod hipotrohoide ona može biti i na kružnici ili unutar nje, odnosno L može biti manje, veće ili jednako r.



Kako u *GeoGebri* konstruirati traženi mehanizam tako da simulira kotrljanje unutarnje kružnice, a rubna točka fiksirane poluge 'piše' krivulju? Da bismo izbjegli opisivanje konstrukcije korak po korak prepuštam zainteresiranom čitatelju da se osobno uvjeri kako program *GeoGebra* sâm generira protokol konstrukcije. Dovoljno je da pokrenete *GeoGebru* na svojem računalu i odaberete izbornik *Datoteka > Otvori iz GeoGebraTube*, te u skočni izbornik upišete broj postavljenog uratka na 'servis u oblaku', a taj je u ovom slučaju **1646009**. Potom oda-


Opis konstrukcije - hipotrohoida.ggb

Br.	Naziv	Iko...	Definicija	Vrijednost	Natpis
1	Točka S		Sjecište od xOs, yOs	S = (0, 0)	
2	Broj R	a=2		R = 3.6	
3	Broj r	a=2		r = 1.2	
4	Broj L	a=2		L = 1.9	
5	Kružnica c		Kružnica sa središtem S i polumjerom R	c: x² + y² = 12.96	
6	Točka A	A	Točka na c	A = (3.6, 0)	
7	Kut α	a=2		α = 1 rad	
8	Točka A'		A rotirano za kut α	A' = (1.95, 3.03)	
9	Točka S_1		S + (1 - r / R) (A' - S)	S_1 = (1.3, 2.02)	
10	Kružnica d		Kružnica sa središtem S_1 i polumjerom r	d: (x - 1.3)² + (y - 2....	
11	Točka A''		A' rotirano za kut (-R) / r α	A'' = (0.8, 0.93)	
12	Točka T		S_1 + L / r (A'' - S_1)	T = (0.51, 0.29)	
13	Dužina a		Dužina [S_1, T]	a = 1.9	L
14	Lokus p...		Lokus[T, α]	putanja = Lokus[T, α]	
15	Točka A'''		A'' zrcaljeno na S_1	A''' = (1.8, 3.11)	
16	Dužina b		Dužina [A''', S_1]	b = 1.2	r
17	Dužina e		Dužina [S, A]	e = 3.6	R
18	Kružnica f		Kružnica sa središtem S i polumjerom R + L - r	f: x² + y² = 18.49	

18 / 18 Pokreni 2 s

berete izbornik *Pogled* > *Opis konstrukcije* i otvorit će se prozor kao na prikazanoj slici, s redoslijedom konstrukcije, nazivima objekata, ikonom korištenog alata, definicijom... Posebnu pažnju obratite na ključne elemente konstrukcije, kako je definirana rotacija unutarnje kružnice s točkom A', položaj njenog središta S_1, rotacija poluge L koju određuje točka A''...

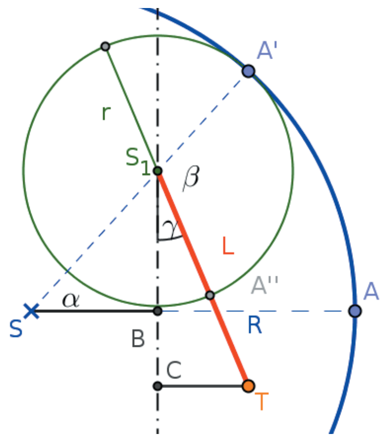
Preko istog internetskog apleta moj se znanac, nakon puno isprobavanja, odlučio za određeni omjer ulaznih parametara, polumjer velike kružnice, polumjer manje kružnice i duljinu poluge. To i nije bio baš lagan posao jer su ponekad vrlo male promjene prouzrokovale velike promjene u izgledu putanje točke T. Sami isprobajte, uvjerit ćete se da je moguće dobiti čitav niz specijalnih slučajeva:

- $L = r$, dobije se hipocikloida
- $R = 2r$, dobije se elipsa
- $R = 3r$ i $L = r$, dobije se deltoida
- $R = 4r$ i $L = r$, dobije se astroida
- $R = 4$ i $3R = 4r$, dobije se trolist itd.

Izazov I. – kako do jednadžbe putanje točke *T*?

Smjestimo li središte S velike kružnice u ishodište koordinatnog sustava, onda možemo promatrati položaj točke T, odnosno izražavati njegove koordinate. Apscisa točke T je zbroj duljina $|SB|$ i $|CT|$, a njih možemo prikazati kao funkciju kuta α, kut koji zatvara središte S_1 s osi apscisa. Kako je duljina dužine $|SS_1|$ jednaka $R - r$, onda je $|SB| = (R - r)\cos\alpha$. Kut β je kut zakretanja točke T od njenog početnog položaja na kotrljajućoj kružnici. Taj kut ovisi o omjeru polumjera kružnice i možemo ga izraziti kao $\beta = \frac{R}{r}\alpha$, iz čega slijedi $\gamma = 180^\circ - (90^\circ - \alpha - \beta) = \frac{R-r}{r}\alpha$. Stoga je $|CT| = L\cos\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right)$, odnosno apscisu točke T možemo izraziti ovako:

$$x(\alpha) = (R - r)\cos\alpha + L\cos\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right).$$



Slično tome ordinatu točke T izražava jednadžba:

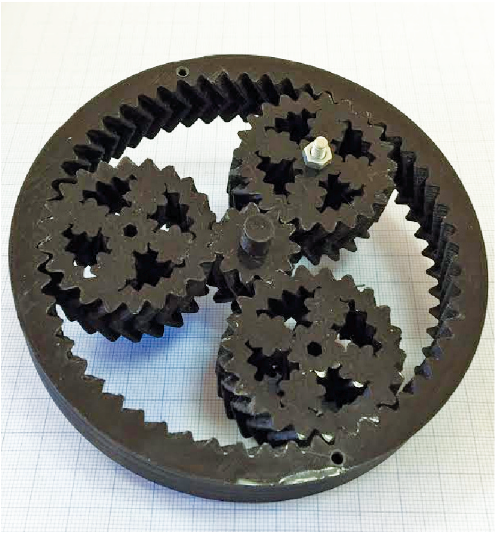
$$y(\alpha) = (R - r)\sin\alpha + L\sin\left(\frac{R-r}{r}\alpha\right).$$

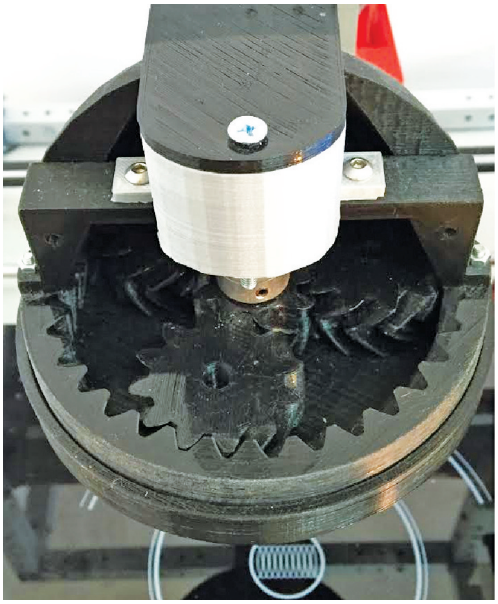
Ovakve jednadžbe nazivamo **parametarske jednadžbe** krivulje. Program *GeoGebra* podržava prihvat ovakvih jednadžbi naredbom:

```
Krivulja[<izraz>, <izraz>,
<varijabla>, <početna vrijednost>,
<krajnja vrijednost>],
```

gdje je prvi izraz vrijednost apscise, drugi izraz vrijednost ordinate, varijabla u našem slučaju kut α, početna vrijednost 0 i krajnja vrijednost 2π. Kada upišete naredbu, trebali biste dobiti graf krivulje koji ste dobili i naredbom *Lokus*, odnosno oni bi se trebali potpuno poklapati za bilo koji pomak ulaznih parametara.

Izrada fizičkog modela ovakvog mehanizma ponešto je drukčija od našeg 'teorijskog' apleta. Kružnice na sebi imaju zupčanike, a pored unutarnje kružnice s polugom izrađuju se još dvije kružnice simetrično raspoređene unutar velike kružnice koje se uglavljuju središnjim pogonskim zupčanikom. Moj je znanac uz pomoć 3D pisača izradio mehanizam kao na sljedećoj slici i ugradio ga u miješalicu (sljedeća slika).





Izazov II. – zakotrljajmo kružnicu izvana

Zamislimo li da se kružnica s fiksiranim štapom kotrlja po vanjskom rubu nepomične kružnice, tada bismo dobili krivulju koju nazivamo *epitrohoida*.

Grčki $\epsilon\pi\iota$ – na, nad i $\tau\rho o\chi o\epsilon\varsigma\delta\eta\varsigma$ – koji ima oblik kotača, okrugao.

Ako smo u *GeoGebri* već konstruirali hipotrohoidu, sada ne bismo morali kretati ispočetka. Dapače, od konstrukcije hipotrohoide možemo dobiti i jednu i drugu krivulju s malom intervencijom. Ranije smo središte kotrljajuće kružnice dobili naredbom: $S + (1 - r/R)(A' - S)$, gdje je točka A' bila rotacija početne točke A oko središta S nepomične kružnice za kut α. Sada je u tom izrazu potrebno samo zamijeniti znak minus u prvoj zagradi znakom plus, a to možemo i množenjem novom varijablom koja poprima naizmjence vrijednost 1 i -1.

Specijalni slučajevi epitrohoide su **epicikloida** za $L = r$ i **Pascalov puž** za $R = r$.

Na kraju...

Sve o specijalnim ravninskim krivuljama poznato je već dugo u matematici. Ono što je novo jest da sada postoje računalni programi u kojima možete na jednostavan geometrijski način modelirati dobivanje krivulje kao skup točaka ravnine koje zadovoljavaju određeni uvjet. Izvedete li jednadžbu takve krivulje, ona se mora poklapati s geometrijski konstruiranom krivuljom, ako ste radili točno. Računalo daje povratnu informaciju jesu li vaši matematički modeli točni! A kada je sve bilo pouzdano točno na virtualnom modelu, moj je znanac mogao odabrati najpovoljnije ulazne parametre za svoju miješalicu koju će izraditi uz pomoć 3D pisača. Sve zajedno izuzetno zabavno. I korisno.

LITERATURA

1/ `https://sl.wikipedia.org/wiki/Hipotrohoida`

2/ `http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html`

3/ `http://ggbtu.be/m1646009`