

Tko je prvi ...uveo uskličnik u matematiku

Franka Miriam Brueckler,
Zagreb

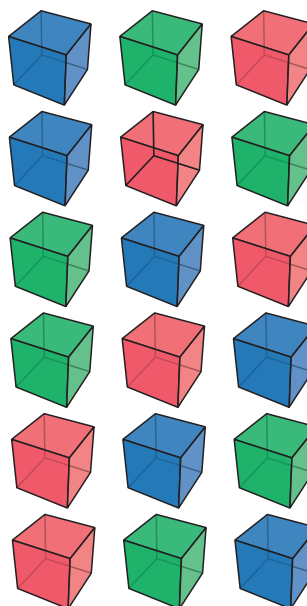
Kad nematematičar ugleda, primjerice, $17!$, nerijetko će upitati: (Za)što to broj sedamnaest više? Naravno, ne samo matematičari, nego i mnogi nematematičari, znaju da nije sedamnaestica uskliknula, već se taj zapis naziva **faktorijel** i znači izmnožene prirodne brojeve od 1 do 17.



Glavni razlog potrebe za skraćivanjem zapisa $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17$ u $17!$ je učestala uporaba takvih umnožaka u kombinatorici: $17!$ je, znate to zasigurno, broj svih **permutacija** od 17 objekata. Stoga ćemo ovdje uz povijest simbola ! kratko spomenuti i povijest permutacija.

Za nestrpljive među Vama, evo odmah odgovora na pitanje iz naslova: današnju oznaku za faktorijel uveo je francuski (elzaški) liječnik, matematičar i fizičar **Christian Kramp** 1808. godine. Eto, ako Vam se ne da, sad ne morate čitati dalje :-)

Čini se da se najstariji poznati primjeri razmatranja broja mogućih rasporeda, dakle permutacija, nekog broja različitih¹ objekata nalaze u srednjovjekovno doba u indijskoj i židovskoj kulturi, i to u vjerskom kontekstu. Jedan od najvećih indijskih matematičara tog doba, po mnogima i najveći, **Bhaskara II.** (1114. – 1185.) u jednom od



Slika 1. $3! = 6$

Doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, fmbquak@gmail.com

¹ Kombinacije i neke druge kombinatoričke teme mogu se naći i puno ranije u indijskoj, kineskoj, a i grčkoj kulturi.

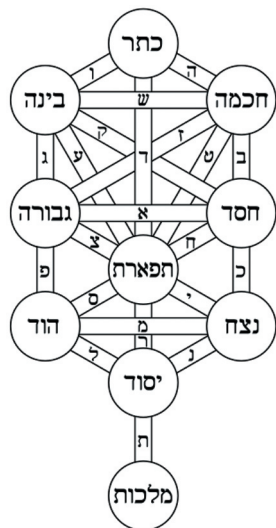
svojih najvećih djela, *Lilavati* (oko 1150.), opisuje kako naći broj rasporeda – kao “rezultat množenja aritmetičkog niza koji počinje sa 1 i povećava se za jedinicu i nastavlja do broja mjesta”². Bhaskara II. daje i primjere.

Koliko je varijacija oblika boga Sambhua koje nastaju izmjenom njegovih deset atributa koje redom drži u svojim brojnim rukama: konopa, kuke za dresuru slona, zmije, bubnja tabora, lubanje, trozuba, postolja kreveta, bodeža, strijele i luka; a koliko onih boga Harija koje nastaju izmjenom toljage, diska, lotosa i školjke?

Rješenje. Broj mjesta/ruku je 10. Na isti način kao ranije pokazano, nalazi se da varijacija oblika boga Sambhua ima 3 628 800. Slično, varijacija boga Harija ima 24.

Najpoznatiji židovski stari izvor kombinatornih razmatranja, mistički tekst *Sefer Yetzirah* (Knjiga stvaranja) potječe možda čak iz 2. stoljeća, a opisuje kako je Beskonačni (*Ain-Sof*) stvorio svemir permutacijama slova.

Židovski se misticizam, uključujući pridavanja mističnog značenja permutacijama i kombinacijama



Slika 2. Verzija kabalističkog stabla života, prema *Sefer Yetzirah*

svih ili nekih slova, posebno širio tijekom 13. stoljeća u Španjolskoj i Francuskoj, a slične su se ideje pojavile i kod kršćanskih mislioca (među njima je najpoznatiji filozof Ramon Llull, (oko 1232. – 1315.)).

Engleski zvonar i otac naizmjenične zvonjave (zvonjava s više zvona u skladu s matematičkim uzorcima zvanima izmjene), Fabian Stedman, je 1677. opisao faktorijele (koji tad još nisu imali to ime) kao brojeve permutacija u naizmjeničnoj zvonjavi: “prvo, mora se dopustiti da dva (zvona) variraju na dva načina”, (što ilustrira zapisom 1 2 i 2 1), a zatim objašnjava da za tri zvona imamo “tri puta dvije figure koje se mogu proizvesti iz tri”, što ponovno ilustrira. Njegovo se objašnjenje svodi na to da fiksiramo po jedno zvono (1, 2 ili 3) nakon čega preostaju ostala dva s po dvije permutacije. Stedman je nastavio s četiri i pet zvona na isti način i konstatirao da se “sve izmjene nekog broja mogu shvatiti kao izmjene na svim manjim brojevima”, tj. *de facto* je istakao rekurzivnu relaciju $n! = (n - 1)!n$. Usput rečeno, Stedman je razmatrao i permutacije slova u abecedi i 20 konja u štali.

U to doba permutacije su počele zanimati i vjerojatnosničare³. **Jacob Bernoulli** (1655. – 1705.), otac prvog oblika zakona velikih brojeva, u svom najznamenitijem djelu *Ars Conjectandi* (objavljeno posthumno 1713.), među ostalim uvodi i pojam *permutacija*.



Slika 3. Jacob Bernoulli

² Ovdje (i dalje) u prijevodima indijskih tekstovima dajemo slobodni prijevod engleskog prijevoda.

³ Vjerojatnost kao matematička disciplina utemeljena je sredinom 17. stoljeća dopisivanjem Pierreom de Fermata i Blaiseom Pascalom.

Abraham de Moivre (1667. – 1754.) poznat je po formuli za potenciranje kompleksnih brojeva, a može se nazivati i ocem normalne distribucije. U *Miscellanea Analytica* (1730.) objavio je prvu novu formulu za broj permutacija: asimptotsku procjenu vrijednosti $n!$ za velike n . Danas je ta formula poznata kao **Stirlingova formula**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(de Moivreov suvremenik, škotski matematičar James Stirling, precizirao je multiplikativnu konstantu u toj formuli).



Slika 4. Abraham de Moivre

No, iako je tako u 18. stoljeću poznato sve osnovno o permutacijama i njihovom broju, taj broj još nije dobio ni ime ni oznaku, već se broj permutacija n objekata zapisuje kao $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (tako je to radio, primjerice, veliki Leonhard Euler).

Zanimljivo je da se i naziv faktoriyel i oznaka s usklikom pripisuje dvama ne pretjerano poznatim francuskim (elzaškim) matematičarima. Naziv *faktoriyel* (franc. *factorielle*) pripisuje se **Louisu Francoisu Antoineu Arbogastu** (1759. – 1803.). Suvremeni je pak simbol, kako smo već rekli, osmislio Christian Kramp 1808. (u djelu *Éléments d'arithmétique universelle*), Arbogastov prijatelj, pri čemu je Kramp za faktorijele ispočetka koristio izraz *facultes*, a poslije prihvatio Arbogastov naziv kao prikladniji i "više francuski". Zgodno je ovdje napomenuti da se u mnogim germanskim jezicima

zadržao prvotni Krampov naziv (Nijemci faktorijele nazivaju *Fakultät*, a Norvežani *fakultet*).

U isto se doba pojavio još jedan prijedlog za oznaku umnoška prirodnih brojeva od 1 do n : $\lfloor n \rfloor$ koji je predložio **Rev. Thomas Jarrett** (1805. – 1882.) godine 1827. Taj je simbol dosta dugo, čak do početka 20. stoljeća, korišten paralelno s Krampovim. Bloger Pat Ballew⁴ čak navodi da je naišao na izdanje časopisa *Mathematics Teacher* iz 1946. u kojem se koristi Jarrettov simbol, i to bez ikakvog komentara, što ukazuje na to da je još uvijek bio čest u uporabi. Isti je bloger naišao i na nedavno korištenje takvog simbola u arapskom svijetu.

Kao zanimljivost navodimo i da je britanski matematičar i logičar **Augustus de Morgan** po uvođenju simbola $n!$ u Englesku 1842. prigovorio: "Među najgorim je barbarizmima uvođenje simbola koji su potpuno novi u matematičkom, a potpuno razumljivi u svakodnevnom jeziku. Autori su posudili od Nijemaca kraticu $n!$ sa značenjem $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, što njihovim stranicama daje izgled izražavanja iznenađenja i divljenja da se 2, 3, 4 itd. nalaze u matematičkim rezultatima".



Slika 5. Augustus De Morgan

Na kraju, podsjetimo da s porastom n brojevi $n!$ jako brzo rastu. Što mislite, za koliki je n broj $n!$ prvi put veći od Avogadrovog broja (broja čestica u 1 molu neke tvari ili, što je isto, broja atoma ugljika u 12 grama izotopa ^{12}C), koji iznosi približno $6.022 \cdot 10^{23}$: je li to za n veći od (a) 12; (b) 24; (c) 48; (d) 96; (e) 192?

⁴ U blogu <http://pballew.blogspot.com/2014/01/notes-on-history-of-factorial.html> možete saznati više o povijesti oznake za faktorijele.