Zabavni zadatak
u vezi s kretanjem puža – dvije epizode malo poznate ali poučne povijesti matematike

Josip Sliško, Puebla, México

Među najpopularnije zadatake zabavne matematike sigurno spada onaj koji se odnosi na čudno kretanje jednog "svojeglavog" puža. Na hrvatskim internetskim stranicama pojavljuje se sljedeća verzija tog zadatka:

"Puž se penje po stupu visokom 10 metara. Danju se popne 5 m, a noću se spusti 4 m. Koliko mu dana treba da se popne na vrh stupa?"

a) *6* **b)** *7* **c)** *8* **d)** *9.*

(`http://www.matka.gradnet.hr/zabavna_matematika.htm`)

Dobro je poznato da mnogi učenici osnovne i srednje škole (ali i studenti i odrasli ljudi!) daju pogrešan odgovor: 10 dana. Taj odgovor se bazira na "brzom mišljenju" (Kahneman, 2011.) koje izgleda "očigledno ispravno": Tijekom jednog dana i noći, ukupan uspon puža je 1 metar $(5\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m})$. Kako se puž treba popeti na visinu od 10 metara, za taj poduhvat potrebno mu je 10 dana (i 10 noći).

Točan odgovor zahtijeva detaljniju analizu i pravilan uvid u rubne uvjete zadatka. Prvo je potrebno shvatiti da puž ne može stići do vrha "noćnim spuštanjem", jer bi to značilo da je letio iznad stupa. Ostaje, dakle, da puž do vrha stupa može doći jedino "dnevnim penjanjem" od (najviše) 5 metara. Da bi to bilo moguće, puž se u prethodnim danima i noćima morao popeti na visinu od 5 metara $(10\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m})$. Kako se za 1 dan i 1 noć popne 1 metar, za uspon od 5 metara mu je bilo potrebno 5 dana i 5 noći. Dakle, puž do vrha stupa stiže krajem šestog dana.

Treba napomenuti da gornja formulacija problema ne poštuje "zlatno pravilo" didaktičkog formulira-

Josip Sliško, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, `josipslisko47@gmail.com`

nja ponuđenih odgovora: Poželjno je da među ponuđenim odgovorima bude barem jedan od odgovora do kojeg učenici dolaze koristeći se spontano nekim alternativnim načinom razmišljanja o nalaženju rješenja problema. Drugim riječima, proces biranja ponuđenih rješenja ne smije biti proizvoljno nizanje izmišljenih brojeva ili matematičkih izraza nego se mora temeljiti na rezultatima istraživanja stvarnih učeničkih rješenja. U ovom slučaju, bolji skup ponuđenih odgovora bi bio:

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10.

Kada se problem pojavio u matematičkim knjigama i kako je rješavan?

Već je rečeno da je problem s kretanjem puža veoma popularan. Kao što biva i sa široko prihvaćenim pjesmama koje se smatraju "narodnim", tijekom vremena je povijesno pitanje izvornog autorstva i "interpretacije" problema postalo nevažno. Međutim, poželjno je (i edukacijski veoma korisno!) razmotriti njegove prve formulacije i rješenja. Naime, niz istaknutih matematičara koji su "rješavali" problem tog tipa radili su to na površan način, bez dubljeg uvida u bit problemske situacije.

Problem je u europsku matematiku uveo Fibonacci u čuvenoj knjizi *Liber Abaci*, objavljenoj davne 1202. godine (Fibonacci & Sigler, 2003.):

"Neki je lav u određenoj jami čija je dubina 50 lakata. On se dnevno popne 1/7 lakta i spusti se 1/9 lakta. Traži se za koliko dana će lav napustiti jamu."

Fibonacci je prvo tražio ukupni uspon lava za 63 dana, jer je 63 najmanji zajednički višekratnik za 7 i 9. Dobio je da se lav za to vrijeme popeo 9 lakata $\left(63 \cdot \frac{1}{7} = 9\right)$, a da se spustio 7 lakata $\left(63 \cdot \frac{1}{9} = 7\right)$. To znači da je ukupni uspon lava za 63 dana bio 2 lakta. Nakon toga Fibonacci se pita koliko dana treba proći da se lav popne ne za 2 lakta, nego za traženih 50 lakata koji odgovaraju

Fibonacci (1170. – 1250.)

Liber Abaci

dubini jame. Odgovor nalazi primjenom proporcijskog postupka, koji bi se danas pisao kao:

$$\frac{\text{broj dana}}{50} = \frac{63 \text{ dana}}{2}.$$

Da bi izašao iz jame, lavu bi bilo potrebno 1575 dana $\left(\frac{50 \cdot 63}{2} = \frac{3150}{2} = 1575\right)$.

Nije teško uočiti da je Fibonacci našao pogrešan, "brzi" odgovor, po kojem lav dolazi na rub jame tek nakon zadnjeg 1575. spuštanja (implicitna i nemoguća pretpostavka "letećeg lava").

Točno rješenje nalazi se tako da se od ukupne dubine jame (50 lakata = 3150/63 lakta) oduzme dnevni uspon zadnjeg dana (1/7 lakta = 9/63 lakta). Dobije se 3141/63 lakta. Taj broj se podijeli s ukupnim dnevno-noćnim usponom od 2/63 lakta što daje rezultat 1570.5 dana i noći. Međutim, broj dana i noći koji su protekli prije zadnjeg uspona mora biti cijeli broj. Iz te činjenice slijedi da su prije dana zadnjeg uspona morali proći 1571 dan i 1571 noć. U tom se vremenu lav popeo na visinu od 3142/63 lakta. Tijekom zadnjeg, 1572. dana, lav se treba popeti samo dodatnih 8/63 lakta (od mogućih 9/63 lakta). Na taj način, točno rješenje je "$1571\frac{8}{9}$ dana".

Fibonaccijevo pogrešno rješenje se ponavljalo kroz nekoliko stoljeća. Calandri (1491.) je lava zamijenio zmijom, ali su način kretanja, dubina jame i 1575 dana u rješenju ostali isti.

Njemački matematičar Adam Riese je 1522. godine problem formulirao za kretanje puža (Deschauer, 2013., str. 107):

"Neki puž se nalazi u bunaru na dubini od 32 lakta. Svakog dana se popne $4\frac{2}{3}$ lakta i svake noći se spušta $3\frac{3}{4}$ lakta. Za koliko dana će izaći van?"

Ries prvo izražava uspon kao $\frac{14}{3}$ lakta i spuštanje kao $\frac{15}{4}$ lakta, a zatim u formi s jednakim nazivnikom: $\frac{56}{12}$ lakta i $\frac{45}{12}$ lakta. Njihova je razlika $\frac{11}{12}$ lakta i to predstavlja ukupan uspon tijekom jednog dana i jedne noći.

Adam Ries (1492. – 1559.)

Nakon toga, Ries izražava i dubinu od 32 lakta u dvanaestinama: $\frac{384}{12}$ lakta. U sljedećem koraku, uzima u obzir rubne uvjete, ali, umjesto da od $\frac{384}{12}$ lakta oduzme zadnji dnevni uspon od $\frac{56}{12}$ lakta, on oduzima noćno spuštanje od $\frac{45}{12}$ lakta. Na taj način, dobiva modificiranu dubinu od $\frac{339}{12}$ lakta. Da bi dobio broj potrebnih dana (i noći), Ries modificiranu dubinu dijeli s ukupnim dnevno-noćnim usponom od $\frac{11}{12}$ lakta pa je njegovo rješenje $30\frac{9}{11}$ dana. Drugim riječima, puž će izaći iz bunara nakon što prođe $\frac{9}{11}$ od zadnjeg 31. dana.

Riesov postupak je bio korak u pravom smjeru, ali je rješenje "$30\frac{9}{11}$ dana" pogrešno, jer od ukupne dubine bunara nije oduzeo dnevni uspon nego noćno spuštanje. U kasnijim izdanjima svoje aritmetike, Ries dolazi do točnog rješenja "$30\frac{54}{56}$ dana", ali se koristi nepravilnim postupkom.

Kao i ranije, prvo od početne dubine (384/12 lakta) oduzima noćno spuštanje (45/12 lakta). Dijeli modificiranu dubinu (339/12 lakta) s ukupnim dnevno-noćnim usponom (11/12 lakta). Cjelobrojni iznos dana i noći je 30. U njima puž realizira kompletna penjanja i spuštanja. Na kraju, na ostatak od 9/12 lakta *ad hoc* dodaje jedno noćno spuštanje 45/12 lakta. Rezultat 54/12 tumači kao rastojanje koje puž prelazi u zadnjem penjanju. Rezultat piše u obliku "$30\frac{27}{28}$ dana".

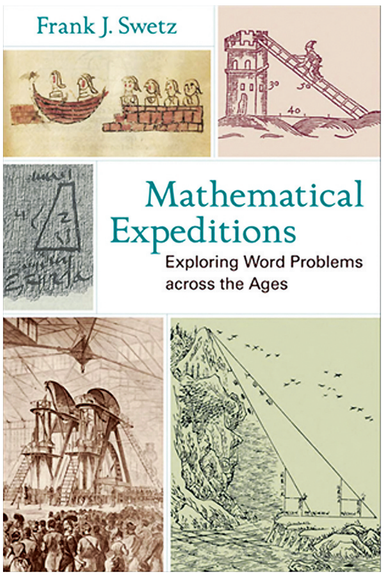
Korektan način izvođenja tog rješenja je sljedeći: Modificirana dubina (328/12 lakta) se dobiva tako da se od početne dubine (384/12 lakta) oduzme zadnje dnevno penjanje (56/12 lakta). Kada se modificirana dubina podijeli s dnevno-noćnim usponom (11/12 lakta), rezultat je 29.818 dana i noći. Međutim, takav je matematički rezultat nemoguć u stvarnom svijetu. To znači da prije zadnjeg uspona mora proći 30 kompletnih dana i noći. Tijekom tog vremena, puž se popeo za 330/12 lakta, pa se zadnjeg dana puž ne mora popeti 56/12, nego tek

54/12 lakta. Na taj način, puž će za zadnje penjanje utrošiti 54/56 ili 27/28 od posljednjeg, 31. dana.

Fibonaccijevo i Riesovo rješenje problema: od lošeg tretmana do boljeg korištenja

Frank J. Swetz, jedan od svjetskih autoriteta u povijesti matematičkih zadataka, uvrstio je Fibonaccijev “problem s lavom u jami” među izabrane probleme srednjovjekovne Europe bez navođenja imena autora (Swetz, 2012., str. 87). Za problem je naveo zaokruženo točno rješenje “1572 dana” (Swetz, 2013., str. 171), ali nije spomenuo da je originalno rješenje problema (1575 dana) bilo pogrešno.

Još je čudniji pristup Alfreda Holla u rukopisu *Tekstualni zadatci u njemačkim knjigama aritmetike u 16. stoljeću* (Holl, n.d.). Holl točno Riesovo rješenje “$30\frac{27}{28}$ dana” proglašava pogrešnim, a kao “točno” nalazi vlastito rješenje “$34\frac{10}{11}$ dana”, koristeći se pogrešnim Fibonaccijevim postupkom $\left(\frac{\frac{384}{12}}{\frac{11}{12}} = 34\frac{10}{11}\right)$! Pored toga, u nekoliko sličnih problema kretanja (među njima je Fibonaccijev problem s kretanjem lava) Holl prihvaća kao točna, rješenja koja su dobivena istim postupkom.



Naslovnica knjige Franka J. Swetza
Matematičke ekspedicije

Ove i slične epizode iz povijesti matematike u nastavi bi se mogle bolje koristiti na dva načina. Jedan je način da se učenicima objasni da neke pogreške nisu znak njihove matematičke inferiornosti nego da su one prirodan rezultat “brzog mišljenja”. Učenici će se sigurno bolje osjećati ako im se u prikladnoj formi kaže da su takvo mišljenje u istim problemima svojevremeno primjenjivali i istaknuti matematičari i da im je za detektiranje i korekciju “brzog mišljenja” bilo potrebno više od 3 stoljeća.

Drugi način korištenja je da se učenicima, koji su naučili pravilno rješavati problem kretanja puža s cijelim brojevima, predloži da otkriju i isprave pogreške u Fibonaccijevu i Riesovu rješenju u kojima se koriste razlomci. Lako je zamisliti kakav će ponos učenici osjećati kada takav zadatak uspješno riješe!

LITERATURA

1/ S. Deschauer, (2013.), *Das zweite Rechenbuch von Adam Ries: eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters*, Berlin: Springer-Verlag.

2/ L. Fibonacci & L. Sigler, (2003.), *Fibonacci’s Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano’s Book of calculation*, New York: Springer, str. 273, “On the Lion Who Was in a Pit”.

3/ A. Holl (n.d.), `http://www.informatik.fh-nuernberg./profešors/Holl/Personal/Textaufg_1500%20Reader%20A5.pdf`

4/ D. Kahnemen, (2011.), *Thinking, fast and slow*, New York: Farrar, Straus and Giroux.

5/ F. J. Swetz, (2012.), *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages*, Baltimore: John Hopkins University Press.