

Dokazi popločavanjem ravnine

Lucija Šer, Zagreb

Uvod

Promotrimo li malo svijet oko sebe, uočiti ćemo da se matematika pojavljuje svugdje oko nas. Izađemo li na ulicu i pogledamo li u tlo, uočiti ćemo različite geometrijske likove. Šetajući gradom tako uočavamo raznovrsna rješenja u popločavanju ulica.

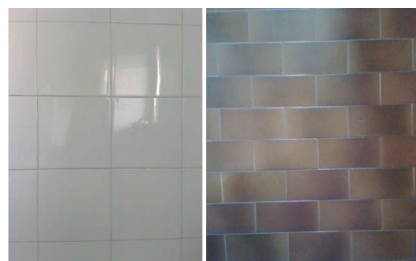
Primjerice uočimo da raznovrsna popločavanja ravnih površina možemo vidjeti i u našim domovima, u našim kuhinjama ili kupanicama (slika 2).

Stoljećima su nam mnogi majstori i umjetnici prikazivali različita popločavanja ravnina u svojim djelima. Majstori su se koristili pločicama za popločavanje podova i zidova zbog njihove izdržljivosti, vodootpornosti i ljepote, a umjetnici su različita popločavanja slikali na svojim slikama u kojima su prikazivali različite scene iz života.

Proučavajući takva različita popločavanja, možemo se pitati kakvim se pločicama možemo koristiti pri popločavanju neke ravne površine kako bi se ona potpuno prekrila. Upravo je problem prekrivanja ravnine nekim ravninskim likovima matematički problem koji zovemo još i problem parketiranja ili popločavanja. Drevni je to problem pa ga možemo naći kod starih Egipćana, Perzijanaca, Grka, Rimljana, a također u Kini, Japanu te ostalim starim civilizacijama. Problem parketiranja sastoji se u otkrivanju načina kako razdijeliti ravninu na mnogokute koji bi je posložili na određeni način u potpunosti prekrivali, bez praznina i preklapanja, uz određene



Slika 1. Primjeri raznovrsnih popločavanja ulica

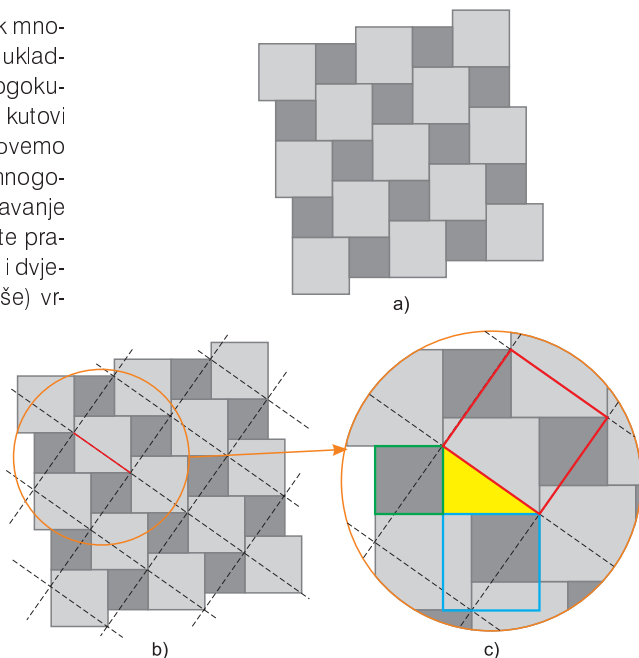


Slika 2. Primjeri popločavanja u našem domu



Slika 3. Johannes Vermeer: *Djevojka s čašom vina*, 1660.
(izvornik: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jan_Vermeer_van_Delft_006.jpg; public domain).

pravilnosti s obzirom na vrstu, oblik i poredak mnogokuta. Ravninu možemo prekriti nekim sukladnim pravilnim mnogokutima, odnosno mnogokutima kojima su sve stranice i svi unutarnji kutovi međusobno sukladni. Takvo popločavanje zovemo pravilnim popločavanjem, a jedini pravilni mnogokuti kojima možemo provesti takvo popločavanje ravnine su jednakostranični trokuti, kvadrati te pravilni šesterokuti. Ravninu možemo popločati i dvjema vrstama pločica, odnosno dvjema (ili više) vrstama pravilnih mnogokuta tako da se oko svakog vrha nižu istim redom. Takvo popločavanje ravnine zove se polupravilno ili Arhimedovo popločavanje. Dakako, ravninu možemo prekriti mnogokutima tako da to popločavanje nije niti pravilno, niti polupravilno. Štoviše, možemo ravninu popločavati i pločicama koje nisu mnogokuti, no bez ikakvih uvjeta i ograničenja postojalo bi bezbroj rješenja za takva popločavanja. Proučimo li neka od gore navedenih vrsta popločavanja, moći ćemo uočiti da s pomoću njih možemo dokazati neke poznate (ali i one manje poznate) matematičke teoreme.



Slika 4. Popločavanje kvadratima

Pitagorin poučak

S pojmom Pitagorina poučka susreli smo se još u osnovnoj školi. Tada smo naučili da u pravokutnom trokutu vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

pri čemu je c duljina hipotenuze, a a i b duljine kateta. Odnosno, ako nad stranicama pravokutnog trokuta nacrtamo kvadrate, vrijedit će da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom.

Postoji više od 100 geometrijskih i algebarskih dokaza Pitagorina poučka, a popločavanjem ravnine možemo pokazati dokaz ovog poučka koristeći se rastavljanjem i preslagivanjem.

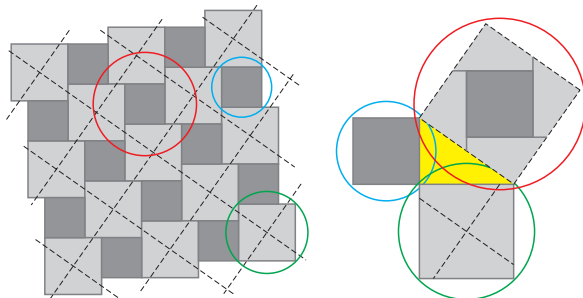
Proučimo popločavanje ravnine kvadratima dvjema različitim veličina (slika 4a)).

Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom sukladnih kvadrata kako je prikazano na slici 4b). Uočimo

da je stranica kvadrata koji pripada toj mreži hipotenuza pravokutnog trokuta čije su katete stranice kvadrata s pomoću kojih smo popločali ravninu (svjetlosivi i tamnosivi kvadratići). Proučimo sada kvadrate koji su nacrtani nad stranicama tog pravokutnog trokuta (žuti trokut na slici 4c)). Uočimo da rastavljanjem i preslagivanjem kvadrata nacrtanih nad katetama pravokutnog trokuta možemo dobiti kvadrat sukladan kvadratu nacrtanom nad hipotenuzom tog pravokutnog trokuta (slika 4c)). Tako smo pokazali da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom. Ovaj dokaz Pitagorina teorema pripisujemo Anniriziju iz Arabije (oko 900.).

Translatiramo li mrežu sa slike 4b) tako da se vrhovi kvadrata te mreže podudaraju sa središtima većih kvadrata (svjetlosivi kvadrati) kojima smo popločavali ravninu, dobit ćemo još jedan dokaz Pitagorina poučka s pomoću rastavljanja i preslagivanja, a pripisujemo ga Henryu Perigalu. Ponovno promatramo pravokutni trokut kojemu je duljina hipotenuze jednaka duljini stranice kvadrata iz mreže i kojemu su katete stranice kvadrata s pomoću kojih

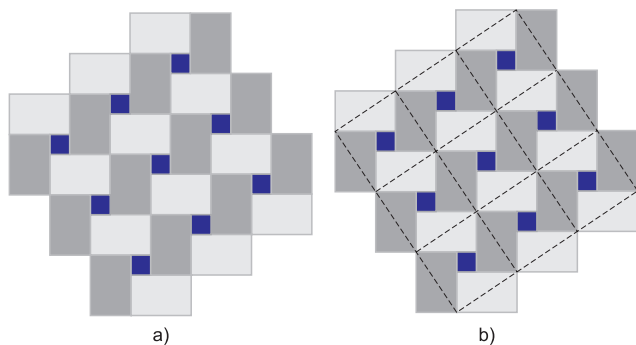
smo popločali ravninu (svjetlosivi i tamnosivi kvadratići). Uočimo da rastavljanjem i preslagivanjem kvadrata nacrtanih nad katetama tog pravokutnog trokuta možemo dobiti kvadrat sukladan kvadratu nacrtanom nad hipotenuzom tog pravokutnog trokuta (slika 5). Tako smo ponovno pokazali da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom.



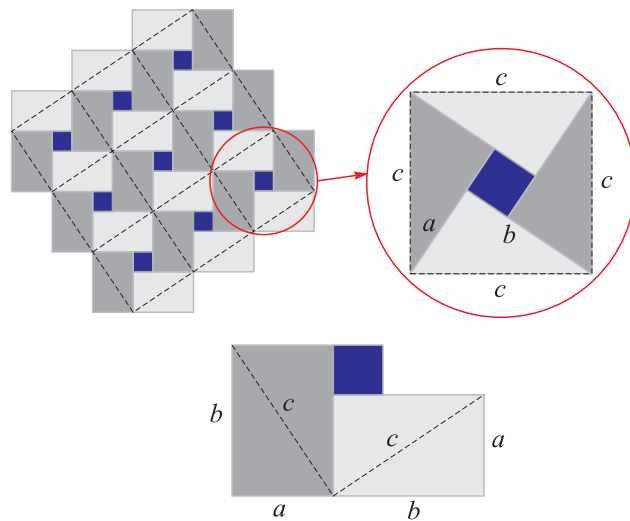
Slika 5.

Pitagorin poučak možemo dokazati i s drukčijim popločavanjima ravnine. Bhāskara je sljedeći dokaz Pitagorina teorema ponudio u 12. st., a opisao ga je riječju "Vidi" koju je zapisao uz sliku. Kako bismo prikazali taj dokaz, promotrimo popločavanje ravnine kvadratima i pravokutnicima kako je prikazano na slici 6a). Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom kvadrata čije su stranice dijagonale pravokutnika kojima smo popločali ravninu (slika 6b)).

Označimo duljinu stranice kvadrata iz mreže slovom c , a duljine stranice pravokutnika kojima smo popločali ravninu slovima a i b . Proučimo sada kvadrat kojemu je duljina stranice jednaka c . Uočimo da taj kvadrat možemo presložiti u pravokutnike i kvadrat kako je prikazano na slici 7.



Slika 6.



Slika 7.

Dakle, kvadrat površine c^2 možemo presložiti u dva pravokutnika čija je površina jednaka ab te u kvadrat čija je duljina stranice jednaka $b - a$, odnosno čija je površina jednaka $(b - a)^2$.

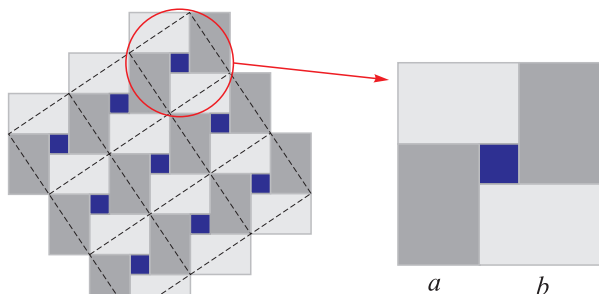
Dakle,

$$\begin{aligned} c^2 &= ab + ab + (b - a)^2 \\ c^2 &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Popločavanje pravokutnicima različitih dimenzija

U prethodnom primjeru vidjeli smo kako ravninu možemo popločati kvadratima i pravokutnicima kako je prikazano na slici 6a). Osim Pitagorina poučka, takvim popločavanjem možemo pokazati i neke druge matematičke tvrdnje. Prije svega, prisjetimo se pojmova aritmetičke sredine i geometrijske sredine. Aritmetička sredina je srednja vrijednost nekog skupa od n brojeva koja se dobiva dijeljenjem njihova zbroja s brojem n , a geometrijska sredina jednaka je n -tom

korijenu umnoška n pozitivnih brojeva. Za dva broja a i b aritmetička sredina jednaka je izrazu $\frac{a+b}{2}$, a geometrijska sredina $\sqrt[2]{ab}$. Promotrimo sliku 8.



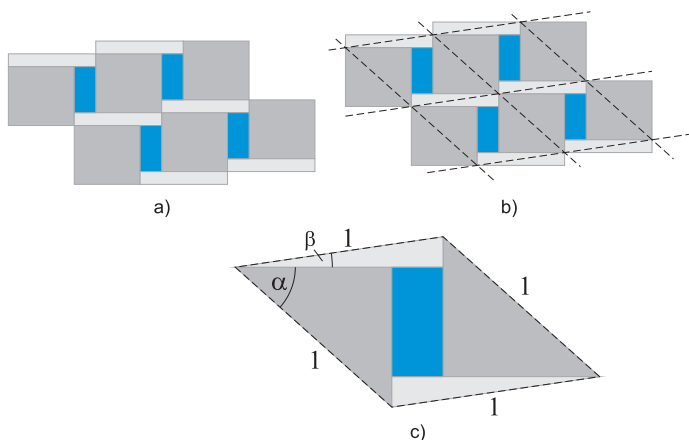
Slika 8.

Uočimo da prikazani kvadrat ima stranicu duljine $a+b$ te da se sastoji od 4 pravokutnika čije su stranice duljine a i b i malog plavog kvadrata. Proučavajući sliku, uočavamo da je $4ab \leq (a+b)^2$ (jednakost vrijedi kada je $a=b$), odnosno:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Ovime smo pokazali nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva a i b .

Popločajmo sada ravninu koristeći se trima različitim pravokutnicima takvim da je dvama pravokutnicima duljina dijagonale jednaka 1, odnosno onako kako je prikazano na slici 9a).



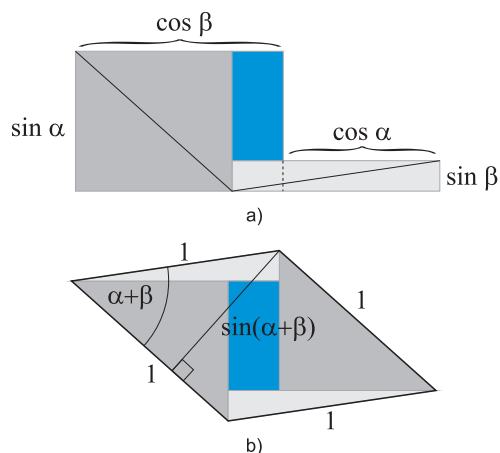
Slika 9.

Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom rombova kojima je duljina stranice jednaka 1 (slika 9b)). Prisjetimo se što nam vrijedi za pravokutni trokut:

$$\sin \text{ kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\cos \text{ kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Primijenimo to na trokute od kojih se sastoji romb na slici 9c) i presložimo dijelove od kojih se sastoji (slika 10a)).



Slika 10.

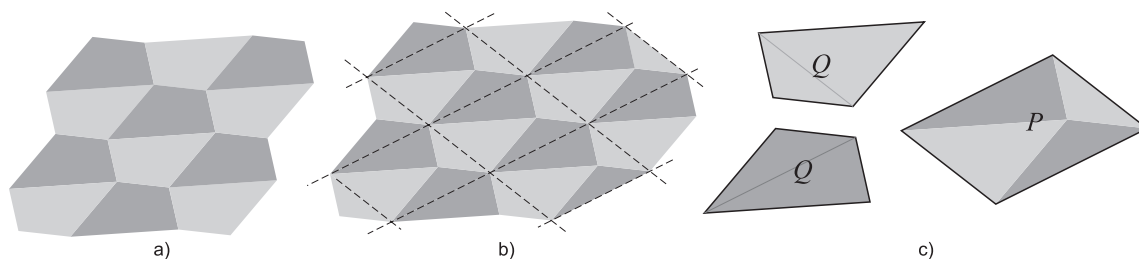
Površina romba jednaka je umnošku duljine stranice i duljine na nju okomite visine pa je površina romba prikazanog na gornjim slikama jednaka $1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ (slika 10b)). S druge strane, površinu geometrijskog lika sa slike 10a) možemo zapisati i kao $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

Tako zaključujemo da je

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Popločavanje ravnine proizvoljnim četverokutima

Osim pravokutnicima i kvadratima, ravninu možemo popločati nekim općenitim, proizvoljnim četveroku-



Slika 11.

tima, koji mogu biti konkavni ili konveksni. Primjer takvog popločavanja možemo vidjeti na slici 11a).

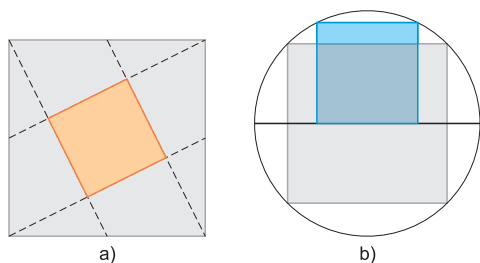
Prekrijmo tako popločanu ravninu paralelogramima čije stranice su paralelne i jednakih duljina kao i dijagonale četverokuta kojima smo popločali ravninu (slika 11b)). Površinu tih paralelograma označimo slovom P , a površinu četverokuta kojim smo prekrivali ravninu slovom Q . Promatrajući tu popločanu ravninu i mrežu paralelograma, uočavamo da je $P = 2Q$ (slika 11c)).

Na kraju napomenimo kako gore navedeni primjeri dokaza popločavanjem ravnine nisu jedini primjeri takvog tipa dokaza matematičkih teorema. Popločavanjem ravnine, primjerice, možemo dokazati i formulu:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Osim toga, popločavanjem ravnine možemo dokazati i sljedeća dva teorema:

Teorem 1. *Nacrtamo li 4 dužine takve da je svako od tih dužina jedna krajnja točka vrh kvadrata, a druga polovište susjedne stranice kvadrata, kako je prikazano na slici 12a), onda je površina manjeg kvadrata koji nastaje konstruiranjem tih dužina jednaka petini površine početnog kvadrata.*



Slika 12.

Teorem 2. *Površina kvadrata upisanog polukrugu jednaka je $\frac{2}{5}$ površine kvadrata upisanog krugu istog polumjera (slika 12b)).*

Bez sumnje, možemo zaključiti kako proučavajući popločavanja ravnine možemo vidjeti mnoge ljepote matematike, uključujući razne teoreme i njihove dokaze.

LITERATURA

- 1/ B. Dakić (2014.): *Matematičar u Zagrebu*, Element, Zagreb.
- 2/ K. Krulić (2005.): *Popločavanje ravnine i njihova primjena u nastavi matematike osnovnoj i srednjoj školi: diplomski rad*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu.
- 3/ R. Nelsen i A. Claudi (2006.): *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, Mathematical Association of America.
- 4/ T. Nemeth, D. Stajčić i Z. Šikić (2013.): *Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb.
- 5/ A Chronicle of Mathematical People:
<http://www.robertnowlan.com/pdfs/Bhaskara.pdf>
- 6/ Wharton Statistics Department:
<http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications/Books/CSMC/New%20Problems/paintings.pdf>
- 7/ Wikipedia:
https://bs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8Detna_strana