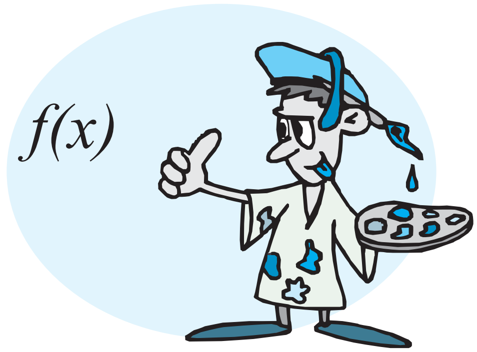
Kodomena



Senka Sedmak, Zagreb

U razgovoru s učenikom izrazila sam nedavno neslaganje s tvrdnjom da je skup $[0, 1]$ kodomena funkcije $x \mapsto \sin^2 x$. Istovremeno, podržala sam ga u tvrdnji da je upravo taj segment realnih brojeva skup slika promatrane funkcije. Kad sam primjerima ilustrirala razliku između ta dva pojma, srela sam se s iznenađenim i glasnim protestom: "Zašto mi to nikad nitko nije rekao?" Evo argumenata koje sam ponudila u obranu svoje tvrdnje:

Definiciju pojma kodomene potražili smo u "Matematičkoj analizi" Laurenta Schwartza: "Neka su D i K dva neprazna skupa, f pridruživanje koje svakom elementu x iz D pridružuje neki element iz K označen $f(x)$. Tada se pridruživanje f naziva funkcijom definiranom na D, s vrijednostima u K ili preslikavanjem skupa D **u** skup K i piše se $f : D \to K$. Skup D se zove domena ili ishodni skup, a skup K kodomena ili konačni skup funkcije f." I dalje – "funkciju f po definiciji zovemo surjektivnom ili surjekcijom, ako je svaki element iz kodomene slika, pri preslikavanju f, bar jednog elementa iz domene."

Dakle, surjektivnost neke funkcije f znači da je za tu funkciju skup njezinih vrijednosti $\{f(x) : x \in D\}$ (zove se još i skup slika) jednak kodomeni.

Ako f nije surjektivna, onda je njezin skup vrijednosti pravi podskup kodomene. Želimo li istaknuti posebnost surjektivne funkcije i naglasiti da je kod nje svaki element kodomene slika nekog elementa domene, reći ćemo da f preslikava skup D **na** skup K. Općenito, kodomena funkcije sadrži skup njezinih slika.

Iz ove definicije ne slijedi nužnost razlikovanja pojma kodomene od pojma skupa vrijednosti funkcije. Samo čudi uvođenje suvišnih pojmova. Ako je kodomena isto što i skup vrijednosti funkcije, onda je svaka funkcija surjektivna, pa je pojam surjektivnosti kao i pojam skupa vrijednosti suvišno uvoditi. Ako pak nije, nego u skladu s definicijom kodomenu K zadajemo prije definiranja preslikavanja, koje će morati primati vrijednosti iz skupa K, ali ne i iscrpiti čitav skup K, onda je dozvoljeno da skup vrijednosti funkcije bude pravi podskup njene kodomene. Ne vidi se iz definicije zašto bismo mi tu dozvolu u slučaju nekih funkcija koristili, a u slučaju nekih drugih funkcija ne. Koristimo li je u slučaju funkcije o kojoj smo počeli razgovarati, dakle funkcije zadane formulom $f(x) = \sin^2 x$, možda je kodomena mogla biti odabrana kao skup $[0, 2001]$ ili npr. $\langle -1, 2 \rangle$, iako nije vidljivo kakvo razmišljanje bi nas navelo na odabir baš jednog od ta dva skupa.

U želji da problem raspravimo na primjerima jednostavnih funkcija, prisjetila sam se posljednje tri stvari o kojima sam mislila prije pisanja teksta o kodomeni, pa ih upotrijebila za konstrukciju primjera funkcije definirane na tročlanom skupu:

Primjer 1. Jedno primljeno pismo pobudilo je kod mene osjećaj radosti, pogled na crvenu keramičku zdjelicu asocirao je misao na salatu od graha, a prisjećanje na razgovor s učenikom naveo me na razmišljanje o kodomeni. Tu se radi o asocijativnom pridruživanju. Tročlanom skupu $D=\{$pismo, zdjelica, sjećanje$\}$ pridruženi su elementi drugog tročlanog skupa $K = \{$radost, salata, kodomena$\}$.

Još jedan primjer funkcije definirane na tročlanom skupu pomaže da se uoče važne razlike:

Primjer 2. Zanimalo me stanje na mom tekućem računu na kraju prva tri mjeseca ove godine, pa sam sa S_n označila stanje na svom tekućem računu krajem $n-$tog mjeseca ove godine, pri čemu je $n \in \{1, 2, 3\}$. Tako sam tročlanom skupu $D = \{1, 2, 3\}$, koji se sastoji od rednih brojeva promatranih mjeseci, pridružila elemente drugog tročlanog skupa $K = \{S_1, S_2, S_3\}$.

Vrijednosti funkcija iz posljednjeg primjera ja sam uspoređivala međusobno, uspoređivala sam ih, a i zbrajala, s vrijednostima analogno definirane funkcije na sljedećem tromjesečnom razdoblju. Zbrajala sam ih međusobno. Povremeno sam željela znati koliko bi moj novac na računu vrijedio u nekim devizama, pa sam vrijednosti promatrane funkcije morala množiti brojem.

Ni jedan od tih postupaka nije smislen za funkciju iz primjera 1. Niti je na skupu K iz primjera 1 definiran uređaj, operacija zbrajanja ili množenja brojem, niti postoji interes da se nešto od toga pokuša definirati. K u ovom primjeru nije ništa više od skupa.

Primjer 3. Pri rješavanju nekog problema u okviru promatranja ponašanja realne funkcije realne varijable pojavila se potreba diskutiranja prvo jednadžbe $\sin^2 x + \cos x = d$ i zatim jednadžbe $a \sin^2 x + b \cos x = d$ $(a, b, d \in \mathbf{R})$.

Jedna od funkcija važna za ovaj problem upravo je funkcija spomenuta na početku teksta. Radi se o funkciji definiranoj za sve realne brojeve, čija je formula $f(x) = \sin^2 x$. Vrijednosti ove funkcije su realni brojevi, ne svi, nego oni iz segmenta $[0, 1]$.

Druga funkcija opisana formulom $g(x) = \cos x$ također je definirana za sve realne brojeve, prima vrijednosti iz skupa realnih brojeva, ali skup vrijednosti joj je segment $[-1, 1]$.

Obje funkcije imaju domenu $\mathbf{R}$. Diskutirajmo izbor kodomene. U slučaju funkcije f, kodomena ne može biti uža od $[0, 1]$, za funkciju g ne može biti uža od $[-1, 1]$. Ali mi želimo zbrajati te dvije funkcije. Ni jedan od navedena dva skupa nije dovoljno širok da sadrži i rezultat zbrajanja za svaku moguću vrijednost varijable. Nije teško naći jedan, ili čak beskonačno mnogo, skupova koji će sadržavati sve moguće rezultate zbrajanja vrijednosti funkcija f i g za isti $x \in D$. Od svih njih, nama su prihvatljivi samo oni, koji istovremeno sadržavaju i rezultate množenja svih mogućih vrijednosti funkcije f proizvoljnim realnim brojem a i odgovarajućih vrijednosti funkcije g proizvoljnim realnim brojem b.

Takav skup, koji bi sadržavao sve linearne kombinacije, s realnim koeficijentima, od $f(x)$, $g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ne može biti uži (pravi podskup) od skupa realnih brojeva. Nepotrebno je da bude širi (pravi nadskup), pa je razumno skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ odabrati za zajedničku kodomenu funkcija f, g.

U primjeru 1 nije imalo smisla uvoditi algebarske operacije ili uređaj. Zato ovdje nema nikave štete proglasimo li skup K kodomenom.

U primjeru 2 zanimljive su nam neke računske operacije. Treba razmisliti koje su to operacije smislene za ovaj slučaj i odabrati dovoljno široku kodomenu, da ni jedne od tih operacija ne daje rezultat izvan odabranog skupa.

I prije svega – treba odabrati kodomenu takvu, da su u njoj odabrane operacije uopće definirane. Suština ove primjedbe bila je neopravdano ignorirana u dosadašnjoj analizi primjera 3 ovog članka, ali i od mnogih drugih autora, u mnogim drugim prilikama. Radi se o tome da zahtjev za izborom takve kodomene u kojoj su definirane algebarske operacije proturiječi definiciji kodomene kao izvjesnog skupa. Naime, na skupu nisu definirane algebarske operacije zbrajanja i množenja.

Algebarska struktura skupa je siromašna – razlikuje samo pripadanje od nepripadanja. Ponekad je prikladno i moguće na skup od bar dva elementa uvesti binarne operacije, u odnosu na koje je skup zatvoren. Te operacije u nekim slučajevima mogu imati dovoljno "lijepa" svojstva, da ih možemo zvati zbrajanjem i množenjem. Ako je tako, a kod skupa realnih brojeva jest tako, onda se tako "obogaćen" skup zove poljem realnih brojeva. Nove atribute tom imenu pribavlja činjenica da tu postoji još i uređaj s potrebnim "lijepim" svojstvima, te svojstvo potpunosti. Zbog jednostavnosti mi govorimo o skupu realnih brojeva, a mislimo na znatno složeniju strukturu, koristeći svakodnevno njezina svojstva. Samo tako je moguće razumjeti, da će u primjeru 3 trebati za kodomenu odabrati "skup" realnih brojeva **R**. Usvajamo dogovor da govorimo i pišemo jednostavno skup **R**, misleći na to da **R** ipak nije samo "goli" skup, nego je nama naročito važno da s njegovim elementima možemo računati i uspoređivati ih na uobičajeni način.

Odavde slijedi da pojam kodomene dobiva svoj puni smisao tek kad proučavamo familiju funkcija, pa unaprijed želimo osigurati mogućnost provođenja nama važnih algebarskih operacije izborom zajedničke kodomene – skupa K obogaćenog potrebnom algebarskom strukturom.

Dakle, pri promatranju familije funkcija i izbora prikladnog skupa K koji će biti njihova zajednička kodomena, najvažnije nam je uzeti u obzir svojstva po kojima K nije skup. Tu se misli – nije samo skup, nego je on obogaćen algebarskom strukturom. I dalje govorimo o skupu K, iako postojanje algebarske strukture na njemu opravdava drugačiji naziv.

Zato o pojmu kodomene nije uputno raspravljati na primjeru funkcija koje imaju vrijednosti iz skupa gdje algebarske operacije nisu definirane. Tu, naime, ne postoji potreba da kodomena bude šira od skupa vrijednosti. Točnije, ne postoji potreba razlikovanja ta dva pojma.

Mnogo češće od takvih funkcija u prilici smo raditi s realnim funkcijama realne varijable. Razumno je za sve njih odabrati skup realnih brojeva **R** kao zajedničku kodomenu. To će nam omogućiti da s funkcijama vršimo neke algebarske operacije, rješavamo jednadžbe i nejednadžbe u kojima se takve funkcije pojavljuju.

Skup kompleksnih brojeva **C** (naravno, obogaćen odgovarajućom algebarskom strukturom) odabrat ćemo za zajedničku kodomenu kad radimo s funkcijama čije su vrijednosti kompleksni brojevi, kojima imaginarni dio ne mora biti nula. Razlozi su isti kao gore. Kako u skupu **C** nije definiran uređaj, u takvom se slučaju unaprijed odričemo mogućnosti korištenja nekih pojmova, smislenih i važnih za funkcije sa $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ali lišenih smisla za funkcije s kodomenom **C**. Takvi su npr. pojam monotonosti ili ekstremne vrijednosti funkcije.

U nekim slučajevima bit će za kodomenu zgodno odabrati skup cijelih brojeva **Z**. Radi se uvijek, pa i tu, o zajedničkoj kodomeni skupa funkcija. Potreba za dovoljno širokom kodomenom obogaćenom dovoljnim brojem dovoljno pravilnih operacija, proistiće iz potrebe da se s tim funkcijama nešto i računa, a ne da se one samo evidentiraju.

Na poslijetku, možemo razmisliti ima li segment $[0, 1]$ spomenut na početku, šansu da bude kodomena bilo koje funkcije.

Navedimo primjer kad je to tako. Funkcija distribucije vjerojatnosti F bilo koje slučajne varijable X definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$ formulom $F(x) = P(X \leq x)$ (tj. kao vjerojatnost događaja da vrijednost slučajne varijable X ne bude veća od realnog broja x) ne samo da uvijek prima vrijednosti iz segmenta $[0,1]$, nego i bilo koja algebarska operacija sa vrijednostima izvan ovog segmenta nema vjerojatnosnu interpretaciju. Radi se o tome, da su slučajne varijable, a o njima je ovdje riječ, vezane uz zadani prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Tu je algebra događaja $\mathcal{A}$ Booleova algebra, koja dozvoljava skupovne operacije unije, presjeka i komplementa u odnosu na sigurni događaj Ω i zatvorena je s obzirom na njih. P je vjerojatnost na $\mathcal{A}$. Operacije algebre na događajima ne izvode odgovarajuće vjerojatnosti iz segmenta $[0,1]$. Operacije s vrijednostima funkcije F koje daju rezultate izvan navedenog segmenta, kao npr. množenje funkcije distribucije realnim brojem $a \notin [0,1]$ ili zbrajanje funkcija distribucija dviju slučajnih varijabli, nisu smislene unutar teorije vjerojatnosti. Zato segment realnih brojeva $[0,1]$ s induciranom algebarskom strukturom realnih brojeva, ima smisla odabrati za zajedničku domenu funkcija distribucije različitih slučajnih varijabli.

Ovaj članak je namjerno neprecizan u imenovanju i definiranju algebarskih struktura. Razlog tome je želja da se sugerira nastavniku matematike u srednjoj školi, osobito gimnaziji, mogućnost ukazivanja na bitna pitanja definiranja funkcije i bez ulaženja u sve detalje i svo nazivlje algebarskih struktura.

Smatram, da je u srednjoj školi moguće objasniti kako je i sam pojam kodomene i izbor kodomene zajedničke za neku familiju funkcija, uvjetovan izborom algebarskih operacija koje na tu familiju funkcija želimo primjenjivati. Izbor kodomene prethodi zadavanju funkcije. Skup vrijednosti funkcije slijedi iz zadavanja domene i propisa pridruživanja. Nakon zadavanja funkcije možemo ga odrediti, za svaku funkciju posebno. Ponekad će se dogoditi da skup vrijednosti pojedine funkcije bude jednak zajedničkoj kodomeni skupa funkcija s kojim radimo, pa onda takva posebna pojava zaslužuje i posebno ime – surjektivnost.

Ako nas nikakve računske operacije na skupu funkcija ne zanimaju, onda nas ne zanima ni kodomena. Nastavnik koji procjenjuje da je i kratki razgovor o računskim operacijama, koji ne ulazi u srednjoškolcima teške detalje niti ih opterećuje neobičnim nazivima, pretežak za razinu njegove škole, najbolje će, po mom mišljenju, učiniti ako kodomenu uopće ne spominje.

Onaj nastavnik koji želi biti određeniji u svom izlaganju nego što je to ovaj članak, posegnut će za udžbenikom matematičke analize i linearne algebre.

Moguće se prikloniti i srednjem rješenju. Na početku izučavanja realnih funkcija realne varijable može se reći i zapisati da će se sad neko vrijeme promatrati funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. To znači npr. da se broj koji nije realan neće priznati kao nultočka ili moguća vrijednost funkcije, ali i to da s takvim funkcijama možemo raditi računske operacije, ili govoriti o uređaju, poštujući zakonitosti koje učenici već poznaju. Za učenike će biti dovoljno instruktivno ako ih upozorimo da zbog toga uzimamo $\mathbf{R}$ kao zajedničku kodomenu npr. funkcija $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 2x+3$, dok o skupovima vrijednosti tih funkcija ne možemo mi odlučivati. To će biti redom skupovi $[0,1]$, $\mathbf{R}^+ = \langle 0, \infty \rangle$, $\mathbf{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$. Samo posljednja među navedenim funkcijama je surjektivna. Injektivna je još i $x \mapsto 2^x$, pa stoga i ona ima inverznu, definiranu, jasno, na skupu njenih vrijednosti. Nakon toga, razumno je učenicima ukazati da u slučaju na primjer familije funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ili $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ nema smisla govoriti o ekstremu ili monotonosti funkcije. Ti pojmovi definiraju se uz pomoć uređaja, a skup $\mathbf{C}$ ne posjeduje uređaj.

Te ili slične primjedbe pomoći će učenicima da razumiju o čemu govorimo, kad govorimo o kodomeni.