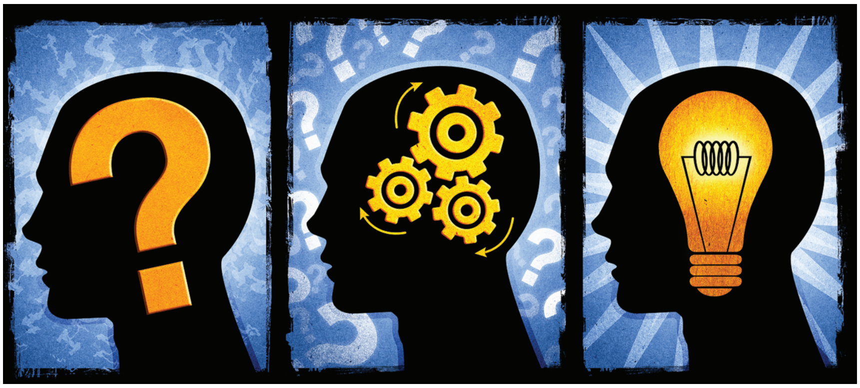
Problem solving
ili rješavanje matematičkih problema – pregled literature

Ana Kuzle, Potsdam, Njemačka



Rješavanje problema je temelj školske matematike. Bez sposobnosti rješavanja problema, primjenjivost i produktivnost matematičkih ideja, znanja i vještina je jako ograničena.
(NCTM, 2000. str. 182)

Početkom 21. stoljeća "ubrzana matematizacija rada u gotovo svim područjima poslovanja, industrije, privatne sfere te društvenim i prirodnim znanostima zahtijeva od učenika poznavanje matematičke tematike opširnije i raznolikije od onoga što pruža program školske matematike" (Fey, Hollenbeck i Wray, 2010. str. 41), stvarajući dosad nezapamćen izazov školskoj praksi. Sadržaj koji se trenutno poučava na satovima matematike iziskuje puno više od pukih aritmetičkih ili računskih vještina te zahtijeva nadogradnju i primjenjivost postojećeg znanja i fleksibilnost u razmišljanju. Dakle, s jedne strane, obrazovne institucije dužne su educirati građane koji su u mogućnosti biti dio globalno-tehnološkog društva, dok u isto vrijeme, moraju promišljati o trenutačnim rezultatima istraživanja u nastavi i učenju matematike u nastavnoj praksi. Pridavanje pažnje rješavanju problema na satovima matematike prepoznato je kao sredstvo u ostvarivanju navedenih ciljeva. Među znanstvenicima matematičkih područja postoji konsenzus kako sposobnost rješavanja matematičkih problema (***problem solving***) nije temelj samo za bavljenje matematikom već i za učenje i poučavanje matematičkog sadržaja (npr. National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, 1980.; 1989.; 2000.; Schoen, 2003.).

Rješavanje matematičkih problema

Naglasak na rješavanju problema u matematici seže u daleku prošlost. Stanic i Kilpatrick (1989.) istraživali su povijest rješavanja matematičkih problema te naveli primjere problema u starom Egiptu

dr. sc. Ana Kuzle, Sveučilište u Potsdamu, Njemačka, `kuzle@uni-potsdam.de`

i Kini. Primijetili su da su "problemi zauzimali središnje mjesto u matematičkom nastavnom kurikulu od antičkog doba. . . rješavanje problema nije" (str. 1). Tek su se 1980-ih metodičari matematike složili oko ideje razvijanja sposobnosti rješavanja problema te je ono postalo fokus matematike kao način za poučavanje kurikuluma i ispunjavanja ciljeva obrazovanja (Stanic i Kilpatrick, 1989.).

U radu mađarskog matematičara Georgea Pólye prikazan je temeljit i iscrpan pregled rješavanja problema. Slijedeći Pólyu (1945./1973.), za kojeg je rješavanje matematičkih problema bila glavna tema u knjizi "Kako ću riješiti matematički zadatak", američki NCTM (1989. i 2000.) je snažno prigrlio ideju razvijanja sposobnosti rješavanja problema u nastavi matematike. NCTM smatra da rješavanje problema treba biti glavni fokus školske matematike iz nekoliko razloga:

(1) zbog izgradnje novih matematičkih znanja
(2) zbog rješavanja problema koji se nameću u matematici, ali i u drugim kontekstima
(3) zbog primjenjivanja i prilagođavanja različitih strategija rješavanja problema i
(4) zbog praćenja i promišljanja procesa rješavanja matematičkih problema.

NCTM (2000.) navodi: "Rješavanje problema nije samo cilj učenja matematike, već i jedan od glavnih načina učenja. Ovladavajući sposobnošću rješavanja problema u matematici, učenici usvajaju načine razmišljanja, navike upornosti i znatiželje, te snalaženje u nepoznatim situacijama" (str. 52).

Ovakav pristup omogućuje učenicima da strateški razmišljaju dok istovremeno uče matematički sadržaj. Konkretnije, od učenika se traži mogućnost analiziranja povezanosti različitih dijelova problema, predstavljanja problemske situacije, odlučivanja o putu rješenja, praćenja njihova napretka, provjeravanje rješenja i procjenjivanja opravdanosti rješenja. U izvješću je naglašena važnost nastavnika kao promicatelja metakognitivnog i reflektirajućeg ponašanja jer se kroz te procese mogu razvijati matematičke vještine i ideje, tj. uloga nastavnika nije samo pomoći učenicima u rješavanju problema, već ih naučiti kako razviti procese potrebne za uspješno rješavanje problema.

Kroz godine su matematičari i metodičari matematike ponudili mnoge definicije *problema* i *rješavanja problema* bez postizanja zajedničkog dogovora. Primjerice, Pólya (1962./1981.) je rješavanje problema opisao kao "pronalaženje puta iz poteškoća, način prelaženja prepreke, postizanje cilja koji nije moguće isprva postići" (str. v). Mayer (1998.) je pak opisao da "problem nastaje prilikom suočavanja s danom situacijom – nazovimo to danom situacijom – ali vi želite drugu situaciju – nazovimo to ciljanim stanjem – međutim nema očitog načina ostvarenja vašeg cilja" (str. 123). Lesh i Zawojewski (2007.) opisuju: "Zadatak ili ciljano orijentirana aktivnost postaje problem (ili problematična) kada 'onaj koji rješava problem' (što može biti grupa stručnjaka koja zajednički surađuje), treba razviti produktivniji način razmišljanja o određenoj situaciji" (str. 782). S druge strane, rješavanje problema je usmjeren kognitivni proces (Schunk, 2008.); odnosno *rješenje problema* se odnosi na kognitivni proces u kojem 'onaj koji rješava problem' odlučuje kako riješiti situaciju u kojoj se nalazi, a rješenje nije odmah vidljivo. Preciznije, Lesh i Zawojewski (2007.) definiraju *rješavanje matematičkog problema* kao proces interpretacije situacije s matematičkog gledišta, što inače uključuje nekoliko ponavljajućih ciklusa izražavanja, testiranja i revizije matematičkih interpretacija, kao i sortiranje, integriranje, mijenjanje, reviziju ili preradu skupine matematičkih pojmova iz raznih tema unutar i van matematike (str. 782).

Rješavanje problema je izuzetno složeno ljudsko djelovanje koje uključuje mnogo više od jednostavnog prisjećanja činjenica i koncepata, odnosno primjene prethodno usvojenih postupaka, koji su često nevidljivi početnicima u rješavanju problema, iako je jedan od ciljeva nastave matematike bio da nastavnici kod učenika razviju vještine potrebne za uspjeh u rješavanju problema. Umjesto toga, rješavanje problema zahtijeva brojne kognitivne aktivnosti i razne vrste znanja. Vještine planiranja, praćenja i prerade strategije jednako su važne kao i posjedovanje znanja iz šireg područja (Schoenfeld, 1985.). Autori (npr. Garofalo i Lester, 1985.; Lester, 1980.; Schoenfeld, 1985. i 1987.) su također istaknuli da prisutnost kognitivnih procesa, bez dostatne kontrole i praćenja odluka nisu dovoljni za potpuno rješavanje problema. Posebice se nemogućnost učenika da

(1) pristupi znanju i organizira znanja koja već posjeduje
(2) planira strategije za implementaciju onoga što je poznato
(3) nadzire učinkovitost tih strategija kao čimbenika koji nepovoljno utječu na uspješnost rješavanja problema,

čini kao jedna od glavnih prepreka u rješavanju problema. Isto tako, Mayer (1998.) ističe da se uspješno rješavanje problema ne oslanja samo na posjedovanje matematičkih znanja, nego i na uklapanje i izvođenje triju komponenata: vještina (područje specifičnih znanja), metavještina (strategije o tome kako i kada se koristiti i kontrolirati znanja), i volje (motivacija i zanimanje za zadatak). Mayer smatra da stručnost u bilo kojoj od komponenata ne garantira uspješno rješavanje problema. Onaj koji rješava problem mora biti vješt u koordiniranju tih triju komponenata istovremeno. Također, onaj koji rješava problem treba znati koju strategiju upotrijebiti, pod kojim uvjetima i kako se njima fleksibilno koristiti. Međudjelovanje ovih triju varijabli je izazov za mnoge učenike. Štoviše, Dewey (1933.) je refleksivno mišljenje smatrao posebnim oblikom rješavanja problema; promišljanje o tome kako riješiti problem podrazumijeva određenu sistematizaciju ideja i njihovo povezivanje s prethodno poznatim.

Iz toga proizlazi da se kompetencija rješavanja problema povezuje s *kognitivnim* (ovdje heurističkim), *motivacijskim* i *voljnim* znanjima, vještinama i postupcima pojedinca potrebnim za samostalno, učinkovito i uspješno suočavanje s matematičkim problemima (Bruder, 2002.; Heinze, 2007.; Kuzle i Gebel, 2016.). U skladu s tim, učenici trebaju

(a) usvojiti pristupe (heuristika) rješavanju matematičkih problema i naučiti kako ih uspješno primijeniti u određenoj situaciji
(b) razviti refleksivnost za vlastite postupke i
(c) razviti spremnost na naporan rad (Bruder, 2002.).

Rješavanje problema je sposobnost neodvojiva od samoregulacije (npr. mogućnost promišljanja i spremnosti da se napravi napor). Budući da rješavanje problema obuhvaća toliko različitih vještina, za mnoge učenike rješavanje problema nije jednostavan zadatak. Međutim, različite nastavne vježbe mogu pomoći učenicima u razvoju ovih ključnih sposobnosti (vidi dalje za više detalja).

Modeli rješavanja matematičkih problema

Postoje različiti modeli koji opisuju proces pronalaženja rješenja od samog početka do kraja. U nastavku ću opisati najčešće korištene modele rješavanja problema Pólye i Schoenfelda koji će pomoći u razumijevanju procesa rješavanja problema.

Model rješavanja problema Georgea Pólye

Rješavanje matematičkih problema glavna je tema u knjigama Georgea Pólye “Kako ću riješiti matematički zadatak” i “Matematičko otkriće”. Pólya (1945./1973.) predlaže dobro poznat model rješavanja problema u četiri faze koje su ključne u procesu rješavanja matematičkog problema:

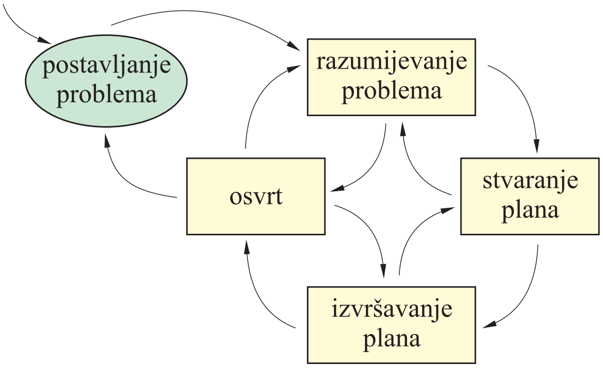
(1) *Razumijevanje problema.* Razumjeti problem usmeno. Odrediti nepoznanicu, podatke i uvjete. Analizirati podatke i uvjete. Nacrtati skicu i uvesti odgovarajući sustav označavanja. Razdvojiti dijelove uvjeta radi lakšeg razumijevanja.

(2) *Stvaranje plana*. Pronaći veze između podataka i problema. Razmotriti ranije korištene metode te mogu li se one primijeniti na dani problem. Razviti plan o tome koje račune i korake je potrebno napraviti kako bismo riješili nepoznanicu.

(3) *Izvršavanje plana*. Pregledati plan rješavanja problema. Pažljivo provjeriti točnost svakog koraka. Primjena plana rješavanja problema.

(4) *Osvrt*. Preispitati rješenje provjerom rezultata. Ispitati smislenost rješenja. Razmisliti o drukčijem dolasku do rezultata, koristeći se rezultatom, metodom ili navodeći drugi problem za rješavanje.

Naravno, taj proces nije linearan, već je po prirodi dinamičan, cikličan i ponavljajući. Mogu se pojaviti krivi koraci te onaj koji rješava problem istovremeno mora pratiti svoj rad i ako je potrebno, iznova se vraćati na prethodne korake i mijenjati strategije sve dok ne dođe do rješenja. Primjerice, u pokušaju stvaranja dobrog plana, može se javiti potreba za boljim razumijevanjem problema; tada se učenik mora vratiti unatrag i ponovno pokušati bolje razumjeti problem. Slika 1 ilustrira dinamičnu i cikličku prirodu modela Georgea Pólye, ali dodaje fazu postavljanja problema koja se temelji na radu Browna i Waltera (citirano u Wilson i sur., 1993., str. 61). U ovom problemskom modelu, bilo koja od strelica označava učenikov proces razmišljanja prilikom rješavanja matematičkog problema.



Slika 1. Dinamičko-ciklička interpretacija modela Georgea Pólye

Iako Pólya u svojem radu ne spominje pojam metakognicije, svaka od četiriju faza u navedenom modelu je po prirodi metakognitivna. Na primjer, u fazi osvrta (Pólya, 1945./1973.), onaj koji rješava problem može si postaviti razna korisna pitanja: "Što je bila presudna točka? Koji je bio glavni problem? Što sam mogao napraviti bolje? Što mi je promaklo?" (str. xii). Općenitije, Pólya od učenika očekuje da promišlja o raznim strategijama (korištenjem prikaza, gledajući svaki slučaj posebno, vraćajući se unatrag, stvaranjem jednostavnijeg problema), načinima razmišljanja i dostupnim obrascima (npr. analiza i sinteza; variranje; analogija; generalizacija i specijalizacija; apstrakcija i konkretizacija; razlikovanje predmeta; superpozicija predmeta; eksperiment; metoda neodređenih koeficijenata; supstitucija i metoda vraćanja veza).

Schoenfeldov model rješavanja problema

Schoenfeld (1985.) je predložio okvir za matematičko rješavanje problema koji se oslanja na teoriju da je učenikova sposobnost rješavanja nerutinskih problema funkcija sa sljedećim četirima komponentama: resursi, heuristika, metakognitivna kontrola i sustavi uvjerenja.

Resursi se odnose na činjenično i proceduralno znanje, tj. na matematičko znanje koje učenik posjeduje uključujući činjenice i algoritamske postupke, rutinske ne-algoritamske postupke, intuicije i "saznanja o dogovorenim pravilima za rad u domeni" (Schoenfeld, 1985. str. 15). Ovo su temelji o kojima ovise sve ostale kategorije. Kako bismo bolje ilustrirali navedeno, recimo da učenik koji ne zna kako pronaći derivaciju pokušava riješiti problem koji zahtijeva poznavanje nagiba tangente krivulje. Bez obzira na to koliko je pokušaj domišljat, gotovo je nemoguće doći do rješenja jer učenik ne posjeduje alate potrebne za samostalan uspjeh.

Heuristika se odnosi na strategije koje se koriste za istraživanje i analizu aspekata nerutinskih problema u pokušaju da se formuliraju putovi do rješenja. Pólya (1945./1973.) opisuje alate i tehnike za procese koji se nazivaju heurističkim. Ti procesi su opće prihvaćeni kao temeljni okvir za razvoj i poboljšanje učeničke sposobnosti rješavanja problema (Schoenfeld, 1985.). Primjeri heurističkih strategija za rad na nerutinskom problemu uključuju: rad unatrag, crtanje figura, dijagrame, potragu za uzorcima, rekonstrukcije problema, ponovno preispitivanje problema, ispitivanje posebnih slučajeva, nagađanje i provjere, stvaranje ekvivalentnog problema, stvaranje jednostavnijeg problema itd.

Metakognitivna kontrola odnosi se na globalne odluke o odabiru i provedbi resursa i strategija, dok se kontrola odnosi na "način na koji netko razvrstava i raspoređuje raspoložive resurse" (Schoenfeld, 1985. str. 13). Dakle, metakognitivna kontrola odnosi se na metakognitivna ponašanja (regulaciju kognitivne aktivnosti), kao što su odluke (donošenje odluka) koje koriste oni koji pronalaze rješenja, o tome hoće li, kada (planiranje) i kako (monitoring) koristiti svoje činjenično znanje, proceduralno znanje (resurse) i heuristiku prilikom pokušaja rješavanja nerutinskog problema.

Sustavi vjerovanja odnose se na samopoimanje učenika, njegov stav o okolini, o raznim tematikama i stav o matematici. *Uvjerenja o sebi* označuju učenikov dojam o sebi kao osobi (npr. samopouzdanje, ustrajnost), dok se *uvjerenja o matematici* odnose na to što zapravo znači matematički razmišljati te kako treba gledati na nepoznate probleme.

Uloga rješavanja problema u nastavi matematike

Rješavanje problema, bez sumnje, igra važnu ulogu u kurikulumu te je bitan dio matematičkog znanja i uspjeha u matematici. Ipak, kroz povijest su se kristalizirale različite funkcije rješavanja problema u nastavi matematike.

Primjerice, Stanic i Kilpatrick (1989.) su sažeto prikazali pogled na rješavanje problema u matematičkoj edukaciji kroz povijest, opisujući ga iz triju perspektiva:

(a) rješavanje problema kao kontekst

(b) rješavanje problema kao vještina i

(c) rješavanje problema kao umjetnost.

Rješavanje problema kao kontekst odnosi se na perspektivu u kojoj je rješavanje problema sredstvo za postizanje cilja. Kraj ili cilj rješavanja problema ovisi o tome je li nastavnikov krajnji cilj motivacija učenika, zabava, sredstvo za učenje novih matematičkih sadržaja ili samo uvježbavanje.

Rješavanje problema kao vještina smatra se vještinom više razine kojom učenici ne mogu ovladati dok nisu savladali vještine niže razine, kao što je rješavanje rutinskih vježbi.

Rješavanje problema kao umjetnost uključuje kreativnost, razmišljanje i otkrivanje matematičkih činjenica. Ova perspektiva je najviše u skladu s Pólyinim viđenjem rješavanja problema.

Schroeder i Lester (1989.) su navedenu tematiku razlučili slično kao i Stanic i Kilpatrick (1989.), ali uz ponešto drukčiji opis uloga rješavanja problema. Schroeder i Lester prepoznali su tri načina kako uključiti rješavanje problema u nastavu matematike:

(a) poučavanje *o* rješavanju problema

(b) poučavanje *za* rješavanje problema

(c) poučavanje *putem* rješavanja problema.

Iako su tvrdili da ta tri pristupa nisu međusobno isključiva, fokus na poučavanju *putem* rješavanja problema je najviše u skladu s ciljem promicanja konceptualnog razumijevanja matematike. Kod poučavanja *o* rješavanju problema ili poučavanja *za* rješavanje problema, nastavnik se izlaže riziku da rješavanje problema postane primarni cilj nastave, a ne matematičko razumijevanje kao što bi to trebalo biti.

Schoen je 2003. godine predstavio novi nastavni pristup, odnosno nastavu *kroz* rješavanje problema, opisujući ga kao:

"Kroz pokušaje rješavanja problemskih zadataka, učenici počinju shvaćati matematičke koncepte i korištene metode, postaju vješti u rješavanju matematičkih problema te razvijaju misaone matematičke navike koje su korisne u bilo kojoj matematičkoj situaciji" (str. xi).

Stoga, dva su osnovna cilja poučavanja kroz rješavanje problema:

(a) da učenici razviju matematičko razumijevanje i

(b) da učenici postanu bolji u pronalaženju rješenja.

Dakle, željeni ishodi su i matematičko razumijevanje i povećanje sposobnosti rješavanja problema, što je moguće istodobno postići. Sljedeći primjer (vidi Okvir 1) ilustrira navedeni nastavni pristup poučavanja kroz rješavanje problema. Kroz ovakav zadatak učenici mogu izgraditi koncept opsega i površine, razvijati pronalaženje uzoraka, sustavni rad te izradu prikaza problemske situacije.

Problem rasporeda sjedenja

Tvoji roditelji odlučili su organizirati ti rođendan. Pozvao si mnogo prijatelja, ali nisu svi odgovorili i ne znaš koliko će ih doći. Na raspolaganju imaš 24 stola u obliku kvadrata koji se mogu slagati jedan uz drugi. Odredi broj takvih stolova potrebnih za organizaciju domjenka promjenjive veličine i brojnosti.

Napomena. Stolovi se moraju dodirivati duž jedne stranice. Dodirivanje u vrhu nije dozvoljeno.

Okvir 1: Problem sjedenja

Situacija iz stvarnog života (izgled stolova na domjenku) pruža kontekst u kojem učenici istražuju i razvijaju koncepte površine i opsega kao i odnose između njih. Štoviše, na početku se ne koriste formule; one se javljaju u sljedećim matematičkim aktivnostima:

(1) Koji je mogući raspored stolova ako primjerice dođe 19-ero prijatelja?

(2) Koliko stolova je potrebno ako dođe samo 17-ero prijatelja? A koliko za 16 prijatelja?

(3) Primjećuješ li uzorak?

Ovaj pristup ima mnoge prednosti. Mnogi učenici gledaju na rješavanje problema kao zabavniji oblik učenja od memoriranja napamet i učenja samo gledajući i slušajući nastavnika. Ta zabava, u kombinaciji s vjerojatnošću da će učenici razumjeti i sačuvati matematičke koncepte, ukazuje na vrijednost poučavanja i učenja kroz rješavanje problema. Još jedna prednost poučavanja kroz rješavanje problema je da učenici razvijaju misaone matematičke navike, kao što su nagađanje, preispitivanje rješenja gledajući unatrag, traženje uzoraka, analiza posebnih slučajeva i prikazivanje problema na različite načine. Konačno, poučavanje kroz rješavanje problema učenicima ukazuje na korisnost matematike, bez obzira na to je li problem postavljen u "stvarnom kontekstu" ili uzet iz potpuno matematičkog konteksta.

Postupci i koncepti za poučavanje rješavanja problema

Postoji najmanje sedam načina za poučavanje rješavanja problema koje su, na temelju 30 godina istraživanja, istraživači matematike proglasili bitnima jer pomažu učenicima u razvoju sposobnosti rješavanja problema (vidi Okvir 2).

Kilpatrick (1985.) razlikuje pet kategorija među mnogim pogledima na to kako poučavati rješavanje problema, koje se kombiniraju u nastavi rješavanja problema. To su:

1. *Osmoza*: Učenicima treba zadati što više problema za riješiti. Kilpatrick dodaje da je vježba rješavanja problema nužna, ali ne i dovoljna ako želimo da učenici postanu vješti u rješavanju problema.

2. *Memoriranje*: Poučavati heurističke strategije kao postupke koji se trebaju zapamtiti i primijeniti.

1. Zadavati mnogo problema.
2. Zadavati "dobre" probleme.
3. Poučavati specifične ili opće strategije rješavanja problema (uključujući i heuristiku).
4. Pokazati primjere rješavanja problema.
5. Ograničiti nastavnikovu dominaciju – na primjer, tako da učenici rade u malim grupama.
6. Promicati metakogniciju – na primjer, postavljanjem metakognitivnih pitanja ili poticanjem učenika na promišljanje.
7. Istaknuti više rješenja.

Okvir 2: Sedam načina za poučavanje rješavanja problema

3. *Imitacija*: Stjecanje sposobnosti rješavanja problema kroz nastavnikove odabrane primjere.

4. *Suradnja*: Organizirati rad u grupama prilikom rješavanje problema.

5. *Refleksija*: Navesti onoga koji je riješio problem da se osvrne na napredak u rješavanju problema i procijeni djelotvornost primijenjenih postupaka.

Slično tome, Lester (1985.) je istaknuo da učinkovita nastava uključuje naglasak na razvoju općih i specifičnih strategija za rješavanje problema, uključujući heuristiku, a također se fokusira i na metakognitivne aspekte. Wilson i sur. (1993.) heuristiku vide kao "vrste informacija, dostupnih učenicima u donošenju odluka prilikom rješavanja problema, pomažu kreiranju rješenja, deskriptivne su više nego strogo propisane, rijetko omogućavaju nepogrešivo vodstvo, a promjenjive su u rezultatima" (str. 63). Zawojevski i Lesh (2007.) heuristiku vide pomalo drukčije te navode da heuristika uključuje strategije "namijenjene da pomognu pri promišljanju o problemskoj situaciji, osvrtanju na problemsku situaciju i interpretaciji problemske situacije više nego da pomognu pri odlučivanju što da učenik učini kada 'zaglavi' u pokušaju rješenja" (str. 768).

Grouws (2003.) tvrdi da je važno da nastavnik ponudi primjer rješavanja problema kao Pólya

(1945./1973.) te na taj način pomogne učenicima uvidjeti kako se matematiku može koristiti za rješavanje problema i pokaže da su upornost i strpljenje dio samog postupka. Pružanje primjera rješavanja problema nema samo pozitivan učinak pri pomaganju učenicima uvidjeti kako se matematika može koristiti za rješavanje problema, već također pokazuje da su upornost i strpljenje dio procesa. Grouws (2003.) je, između ostalog, istaknuo značaj zadavanja raznih problema učenicima i važnost više mogućih rješenja. Isticanje više rješenja uključuje uspoređivanje korisnosti različitih rješenja.

U posljednjih nekoliko godina, Bruder i Collet (2011.) razvile su koncept nastave za rješavanje problema izgrađen oko Lompscherove ideje "fleksibilnosti misli" (1975.). On piše da se *fleksibilnost misli* izražava "sposobnošću mijenjanja aspekta gledišta, sposobnošću stavljanja jednog slučaja ili komponente u različite korelacije te shvaćanjem relativnosti slučaja i tvrdnji. Fleksibilnost misli dopušta preokretanje odnosa, što omogućava lakše i brže usklađivanje s novim uvjetima mentalne aktivnosti ili istovremeno promišljanje o nekoliko aspekata zadane aktivnosti" (str. 36).

Na ove tipične manifestacije mentalne agilnosti može se fokusirati pri rješavanju problema matematičkim sredstvima i mogu se povezati s heurističkim pristupima znanim iz rada Georgea Pólye:

1. *Redukcija* se odnosi na sposobnost da onaj koji rješava problem intuitivno i na razuman način reducira problem na osnove ili da ga pokuša vizualizirati. U tom slučaju, često se koristimo vizualizacijom i strukturalnim pomagalima, kao što su informativne slike, tablice, grafikoni ili jednadžbe.

2. *Reverzilbilnost* se odnosi na sposobnost da onaj koji rješava problem preokrene tok misli. Odgovarajuća heuristička strategija ovome je metoda unatrag.

3. *Obaziranje na aspekte* odnosi se na sposobnost onoga koji rješava problem da u obzir uzme nekoliko aspekata danog problema ili da s lakoćom prepozna bilo kakvu međuzavisnost odnosa. Odgovarajuće heurističke strategije su, primjerice, načelo nepromjenjivosti, načelo simetrije, sastavljanje i rastavljanje geometrijskih likova i tijela za izračunavanje površine i volumena te sustavno provođenje radnji.

4. *Promjena aspekata* odnosi se na sposobnost onoga koji rješava problem da promijeni svoje pretpostavke, kriterije ili aspekte kako bi se pronašlo rješenje. Ova sposobnost sprečava "zapinjanje" i otvara prostor novim pristupima i gledištima (npr. simultan rad naprijed i natrag, analiza različitih problema, upotreba vektora).

5. *Transfer* se odnosi na sposobnost prijenosa dobro poznatog postupka na drugi postupak koji je često u vrlo različitom kontekstu (npr. korištenje analogije).

Osobe koje problem rješavaju intuitivno ili bez prethodne uvježbanosti, često ne posjeduju gore navedene sposobnosti. To je razlog zašto često ne mogu objasniti kako su došli do rješenja. Rješavanje problema može se uvježbati učenjem heurističkih strategija koje odgovaraju aspektima intelektualne fleksibilnosti. Iz svega navedenog slijedi da se učenje kako riješiti probleme može formirati kao dugoročan proces učenja i poučavanja u kombinaciji sa samoregulacijom (Bruder, 2002.; Bruder i Collet, 2011.), a obuhvaća sljedećih pet faza:

(1) *Intuitivno upoznavanje*: Ova faza se temelji na Pólyinom modelu (1945./1973.), prema kojem nastavnik služi kao primjer pri uvođenju problema učenicima. Prema tome, nastavnik vodi učenike moderirajući ponašanja tipična za problem, uključujući se u samopropitkivanje koje se odnosi na različite faze procesa rješavanja problema (prije, za vrijeme i poslije). Primjeri takvih pitanja su: "Koju tehniku sam koristio za rješavanje sličnog problema u prošlosti? Što se traži u problemu? Koje informacije su nam dane? Postoji li nešto što ne razumijem? Idem li u pravom smjeru?... Jesam li napravio pogreške iz nepažnje?".

(2) *Eksplicitno učenje strategija*: Tijekom ove faze učenike se uvodi u heuristička pitanja tipična za strategiju u fokusu na temelju pitanja navedenih u prvoj fazi. Raspravlja se o posebnostima heuristike. Uobičajeno je i preporučljivo da se karakteristične problemske situacije koriste za uvođenje heurističke strategije, tako da

učenici mogu lakše prepoznati glavne ideje heurističkih pitanja i zapamtiti specifične korake za rješavanje problema.

(3) *Produktivna faza vježbanja*: U ovoj fazi učenici vježbaju rješavanje problema kroz heuristička pitanja te se proširuju mogućnosti iz prethodnih dviju faza. Osim toga, diferencijacija je vodeći koncept tijekom ove faze, kako bi učenici mogli izabrati na kojoj kognitivnoj razini žele raditi i prilagoditi promatran postupak poučavanja.

(4) *Proširenje konteksta*: U ovoj fazi učenici vježbaju korištenje heurističkih pitanja i strategije neovisno o matematičkom kontekstu. Na taj način učenici uče kako se fleksibilno, nesvjesno i neovisno o kontekstu koristiti heurističkim pitanjima i strategijom. Isto tako, osoba koja uči, može pokazati strategije samokontrole, čak i za vrijeme odsutnosti modela.

(5) *Svjesnost vlastitog modela rješavanja problema*: Cilj koncepta poučavanja je da se nadogradi učenikov model rješavanja problema kako bi ubuduće bio u stanju uspješnije riješiti probleme koristeći se različitim heuristikama. Svijest o značaju vlastitog modela za rješavanje problema može se potaknuti tražeći učenike da se osvrnu i dokumentiraju svoj model za rješavanje problema.

Važno je napomenuti da se ovaj nastavni koncept ne odvija samo na jednoj lekciji ili cjelini, već se postupno razvija tijekom cijele školske godine. Ovakav koncept nastave nudi sustavan način promoviranja dugoročnog razvoja sposobnosti za rješavanje matematičkih problema. U jednom od nadolazećih brojeva MiŠ-a ovaj će nastavni koncept biti obrazložen na konkretnim primjerima iz nastave matematike.

Umijeće rješavanja problema je suština matematike (Wilson, Fernandez i Hadaway, 1993. str. 66).

S engleskog prevela: Lucija Stepanić

LITERATURA

1/ R. Bruder (2002.): *Lernen geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht*, Mathematik lehren, 115, 4–8.

2/ R. Bruder, C. Collet (2011.): *Problem lösen lernenim Mathematik unterricht*, Berlin, Cornelsen Scriptor.

3/ J. Dewey (1933.): *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*, Boston, MA: Heath.

4/ J. T. Fey, R. M. Hollenbeck, J. A. Wray (2010.): *Technology and the mathematics curriculum*, u B. J. Reys, R. E. Reys, & R. Rubenstein (ur.), *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions* (pp. 41–49), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5/ J. Garofalo, F. K. Lester (1985.): *Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance*, Journal for Research in Mathematics Education, 16, 163–176.

6/ D. A. Grouws (2003.): *The teacher's role in teaching mathematics through problem solving*, u H. L. Schoen (ur.), *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6–12*, (pp. 129–141), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

7/ A. Heinze (2007.): *Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive*, Journal für Mathematik-Didaktik, 28 (1), 3–30.

8/ J. Kilpatrick (1985.): *A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving*, u E. A. Silver (ur.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, (pp. 1–16), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

9/ A. Kuzle, I. Gebel (2016.): *Development of materials for problem solving instruction in the context of lessons for promoting and improving specific mathematical competences using design based research*, u T. Fritzlar, D. Assmuss, K. Bräuning, A. Kuzle, & B. Rott (ur.), *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 2015 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving*, Ars Inveniendi et Dejudicandi 6 (pp. 159–172). Münster: WTM-Verlag.

10/ R. Lesh, J. S. Zawojewski (2007.): *Problem solving and modeling*, u F. K. Lester (ur.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (2. izd., pp. 763–804), Charlotte, NC: Information Age.

11/ F. K. Lester (1980.): *Research on mathematical problem solving*, u R. J. Shumway (ur.), *Research in mathematics education* (pp. 286–323), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

12/ J. Lompscher (1975.): *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten*, Berlin: Volk und Wissen.

13/ R. E. Mayer (1998.): *Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving*, Instructional Science, 26 (1–2), 49–63.

14/ National Council of Teachers of Mathematics (1980.): *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980's*, Reston, VA: Author.

15/ National Council of Teachers of Mathematics (1989.): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.

16/ National Council of Teachers of Mathematics (2000.): *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.

17/ G. Pólya (1973.): *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, Princeton, NJ: Princeton University Press, (originalno djelo objavljeno 1945).

18/ G. Pólya (1981.): *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (ur.), New York, NY: Wiley, (originalno djelo objavljeno 1962).

19/ H. L. Schoen, (ur.) (2003.): *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6–12*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

20/ A. H. Schoenfeld (1985.): *Mathematical problem solving*, Orlando, FL: Academic Press.

21/ A. H. Schoenfeld (1987.): *What's all the fuss about metacognition?*, u A. H. Schoenfeld (ur.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

22/ D. H. Schunk (2008.): *Learning theories: An educational perspective* (5. izd.), New York, NY: Prentice Hill.

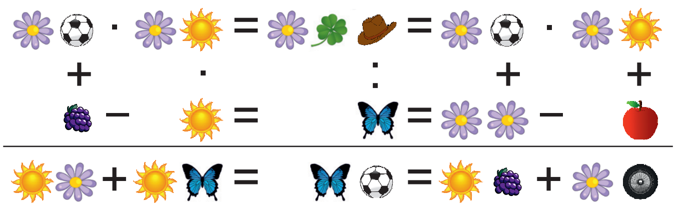
23/ T. L. Schroeder, F. K. Lester (1989.): *Developing understanding in mathematics via problem solving*, u P. R. Trafton, A. P. Shulte (ur.), *New directions for elementary school mathematics* (1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 31–42), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

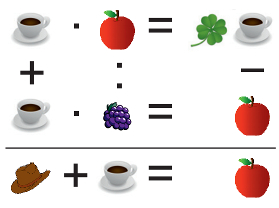
24/ G. Stanic, J. Kilpatrick (1989.): *Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum*, u R. I. Charles & E. A. Silver (ur.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–31), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

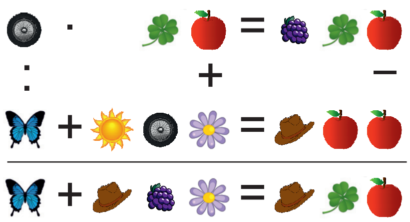
25/ J. W. Wilson, M. L. Fernandez, N. Hadaway (1993.): *Mathematical problem solving*, u P. S. Wilson (ur.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57–77) New York, NY: Macmillan.

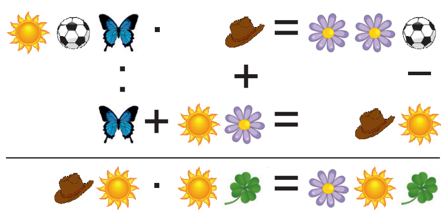
Matematički rebusi

Zamijeni znakove odgovarajućim znamenkama tako da račun bude ispravan.

1) 

2) 

3) 

4) 

Rješenja:
1) 15 · 12 = 180 = 15 · 12; 6 – 2 = 4 = 11 – 7; 21 + 24 = 45 = 26 + 19 **2)** 2 · 6 = 12; 2 · 3 = 6; 4 + 2 = 6
3) 9 · 50 = 450; 3 + 197 = 200; 3 + 247 = 250 **4)** 168 · 2 = 336; 8 + 13 = 21; 21 · 15 = 315