

Pogled u beskonačnost

Dunja Paukner Stojkov, Zagreb



U mnoštvu matematičkih pojmova ima onih koji učenike posebno zaintrigiraju, koji ih zbunjuju i zbog kojih, bez obzira na bilo kakva objašnjenja, i dalje postavljaju pitanja. Riječ je o apstraktnim pojmovima kojima ni sami matematičari do danas nisu dali konačnu definiciju i potpuno objašnjenje. Takav je pojam, pojam beskonačnosti. Dogodilo mi se nedavno da, spomenuvši u razredu taj pojam nije bilo moguće završiti planirani nastavni sat jer se rasplamsala žustra diskusija među učenicima o beskonačnosti.

Nije čudno da se učenici spotiču o taj pojam, jer beskonačnost kao suprotnost pojmu konačnosti mučila je i same matematičare od davnih vremena.

Danas u raznim naukama nailazimo na taj pojam, npr. u fizici, kemiji, međutim matematika je najviše doprinijela upoznavanju svojstva i prirode beskonačnosti.

U tijeku razvoja matematika je nekoliko puta prolazila kroz periode sumnje i krize kad se postavljalo pitanje točnosti matematičkih rezultata. Jedan od glavnih uzroka ovih kriznih perioda matematike je pojam beskonačno. Međutim, s beskonačno malim i beskonačno velikim veličinama povezani su i najbližaviji rezultati u matematici.

U različitim periodima razvoja matema-

tike odnos prema pojmu beskonačno bio je različit. Tako u periodu rađanja matematike čovjek otkriva zakonitosti koje postoje između brojeva i zatim prvi put praktično primjenjuje stečena znanja. To je zapravo period kad u području konačnog ima mnogo nepoznatog i neriješenog, a problemi u vezi s beskonačnim još se ne rješavaju. Ljudi su i tada bili svjesni da mogu neograničeno nastaviti s brojanjem pa su se javljale neke predodžbe o beskonačnosti, ali to je najvjerojatnije stvaralo nedoumice i nemogućnosti objašnjenja. Prvo je nejasnoće trebalo riješiti u području konačnog, da bi se došlo do apstraktnog pojma beskonačnosti.

U matematiku taj pojam uvode i njima operiraju starogrčki matematičari Anaksagora i Demokrit. Anaksagora je pisao: "Među malim veličinama ne postoji najmanja, već smanjivanje ide neprekidno", odnosno za beskonačno velike: "Uvijek postoji nešto veće od onog što je veliko". U osnovi je učenja Anaksagore o prirodi i beskonačnosti neprekidnost.

Pitagorejci su poznavali cijele i racionalne brojeve i cijelu su geometriju nastojali zasnovati na cijelim brojevima, ali beskonačni proces stvorio je jaz između aritmetike i geo-

metrije. Zato su se grčki matematičari opredijelili za geometriju, razvijajući ju do takvih granica da se više od dvije tisuće godina gotovo ništa novo nije moglo dodati njihovim rezultatima.

U 17. st. počinje period promjenljivih veličina kada se matematika naglo dalje razvija. Taj period ukrasila su nezaboravna imena u matematici: Descartes, Fermat, Pascal, braća Bernoulli, Euler, Lagrange. . . , zajedno s velikanima matematike Newtonom i Leibnizom. Promjenljive veličine omogućile su da se lakše izraze beskonačni procesi koji su u osnovi diferencijalnog i integralnog računa i koji su jedno od najznačajnijih otkrića matematike. Stoga je razumljivo zašto beskonačno postaje dominantan pojam u matematici. U ovom periodu matematičari su prihvatili i posebnu oznaku za beskonačno: ∞ . Taj simbol uveo je 1665. Wallis.

Neopreznom upotrebom nepreciznih pojmova javljaju se paradoksi i kontradiktorni rezultati pa taj pojam mnogi matematičari svjesno izbjegavaju. Međutim, ta kriza nije utjecala na jednostrani razvoj matematike (kao u antičkoj Grčkoj), već na njezin svestrani razvoj. U tom razdoblju došlo je do velike akumulacije matematičkih znanja. Odreći se beskonačnosti značilo bi odreći se naučnog bogatstva, a isto tako bilo bi to odbacivanje višestoljetnog truda matematičara. A što bi to dobilo? Dobila bi se siromašna, kristalno čista matematika, neproturječna, ali možda i beživotna.

Problem u vezi s pojmom beskonačnosti još u oštrijoj formi vraća se u novije vrijeme pojavom Cantorove teorije skupova (intuicionisti) i do danas nije na zadovoljavajući način riješen. Još su starogrčki matematičari razlikovali potencijalnu od aktualne beskonačnosti, a danas se smatra da su to dva potpuno različita pojma i njihovo je miješanje nedopustivo.

Do pojma potencijalne beskonačnosti dolazi se preko konačnih skupova. Beskonačno se javlja samo kao mogućnost, a sve

se odvija na granicama konačnog.

Nasuprot potencijalnoj beskonačnosti aktualna beskonačnost javlja se kao postoja- na beskonačnost. Aktualna beskonačnost se shvaća kao nešto što je postalo beskonačno i kao nešto apsolutno iza granica konačnog. Do pojma aktualne beskonačnosti dovodi težnja da se sazna ono što je van granica konačnog, a što znači da se vjeruje da tako nešto postoji.

Stoljetna nastojanja matematičara bila su da im teorije budu bez proturječnosti. Zato su neki pojam aktualne beskonačnosti odbacili. Tako nastaju različiti pravci kao što su logicizam, formalizam, intuicionizam. . .

I danas na pragu 21. st. matematika se dalje burno razvija, broj matematičkih teorija će se povećavati i među njima će biti onih koji će se baviti problemima u vezi s beskonačnim, jer ta pitanja ostaju aktualna.

Dakle, problem beskonačnosti mučit će ne samo učenike, nego i matematičare vjerojatno beskonačno dugo. I ne zaboravimo:

$$a + \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty, \frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty.$$

