Karakteristične točke jednakokračnog trokuta

Maja Starčević, Zagreb

Poznato je da u svakom trokutu, koji nije jednakostraničan, težište, ortocentar i središte trokutu opisane kružnice pripadaju istom pravcu koji zovemo Eulerov pravac. Središte trokutu upisane kružnice općenito ne pripada istom pravcu, ali u jednakokračnim trokutima sve četiri točke pripadaju simetrali osnovice. I neke druge poznate točke se kod takvih trokuta nalaze na istom pravcu te možemo odrediti njihov poredak.

Odredit ćemo položaje sljedećih karakterističnih točaka jednakokračnog trokuta; težišta (T), ortocentra (H), središta upisane kružnice (U), središta opisane kružnice (O), Gergonneove točke (G) i Nagelove točke (N). Definicije prvih četiriju točaka smatramo poznatima jer se obrađuju na redovnoj nastavi. Navedimo definicije preostalih točaka. Gergonneova točka je presjek spojnica vrhova trokuta s diralištem upisane kružnice na nasuprotnoj stranici, dok je Nagelova točka presjek spojnica vrhova trokuta s diralištem pripisane kružnice na nasuprotnoj stranici. Sve promatrane točke su kolinearne te nam je cilj opisati njihov poredak ovisno o vrsti trokuta.

Neka je dakle zadan jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$ duljine a i krakovima duljine b. Lako je dokazati da se sve promatrane karakteristične točke nalaze na simetrali s stranice $\overline{BC}$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$. Izračunat ćemo duljine $|PT|$, $|PH|$, $|PU|$, $|PO|$, $|PG|$ i $|PN|$ te ih usporediti. Sve duljine izrazit ćemo u ovisnosti o a, b i duljini v visine iz vrha A koja je jednaka

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Za početak računamo udaljenost težišta od točke P. Kako je duljina težišnice $\overline{AP}$ jednaka v, a težište T dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ od vrha trokuta, zaključujemo da je

$$|PT| = \frac{1}{3}v.$$

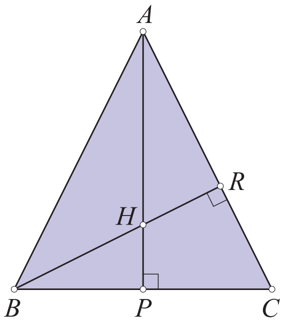
Dalje računamo udaljenost točaka P i H. Neka je za početak trokut ABC šiljastokutan. Označimo nožište visine iz B na stranicu $\overline{CA}$ sa R (slika 1). Primijetimo da su trokuti AHR i ACP slični. Tada vrijedi

$$\frac{|AR|}{|AH|} = \frac{|AP|}{|AC|}. \tag{1}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokute BRA i BCR slijedi

$$\begin{aligned} |AB|^2 - |AR|^2 &= |BC|^2 - |CR|^2 \\ &= |BC|^2 - (|CA| - |AR|)^2. \end{aligned}$$

doc. dr. sc. Maja Starčević, Zavod za primijenjenu matematiku, PMF–Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, mstarcev@math.hr



Slika 1.

Prema tome imamo

$$|AR| = \frac{2b^2 - a^2}{2b}.$$

Iz (1) dobivamo

$$|AH| = \frac{2b^2 - a^2}{2v},$$

odnosno

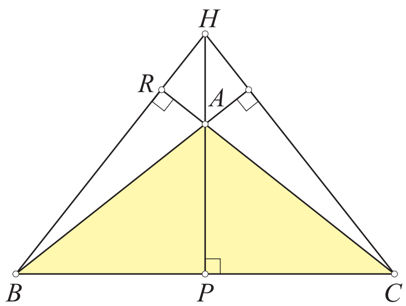
$$|PH| = |AP| - |AH| = \frac{a^2}{4v}.$$

U slučaju tupokutnog trokuta neka je R nožište visine iz B na pravac CA (slika 2). Imamo sličnost trokuta ARH i APC pa je

$$\frac{|AR|}{|AH|} = \frac{|AP|}{|AC|}. \tag{2}$$

Također, iz pravokutnih trokuta ARB i RBC dobivamo

$$|BR|^2 = |AB|^2 - |AR|^2 = |BC|^2 - (|AC| + |AR|)^2,$$



Slika 2.

odnosno

$$|AR| = \frac{a^2 - 2b^2}{2b}.$$

Tada koristeći (2) dobivamo

$$|PH| = |AH| + |AP| = \frac{a^2}{4v}.$$

Konačno, ako je trokut ABC pravokutan, ortocentar mu se podudara s vrhom A pa zbog $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ vrijedi $|PH| = v = \frac{a^2}{4v}$.

Zaključujemo da u svim slučajevima vrijedi

$$|PH| = \frac{a^2}{4v}.$$

Sada računamo $|PU|$. Kako je (slika 3)

$$P(ABC) = P(ABU) + P(BCU) + P(CAU),$$

vrijedi

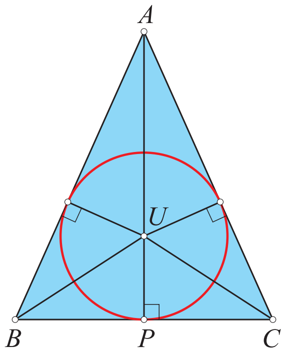
$$P(ABC) = \frac{a + 2b}{2}|PU|.$$

S obzirom na to da je

$$P(ABC) = \frac{|BC| \cdot |AP|}{2},$$

konačno imamo

$$|PU| = \frac{av}{a + 2b}.$$



Slika 3.

Odredimo i duljinu $|PO|$. Neka je trokut ABC šiljastokutan. Primijetimo da je $|AO| = |BO|$ (slika 4). Iz pravokutnog trokuta BPO slijedi

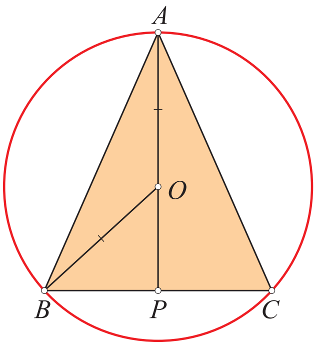
$$|BO|^2 = |BP|^2 + |PO|^2 = |BP|^2 + (|AP| - |BO|)^2$$

te je

$$|BO| = \frac{b^2}{2v}.$$

Konačno je

$$|PO| = |AP| - |BO| = \frac{2b^2 - a^2}{4v}.$$



Slika 4.

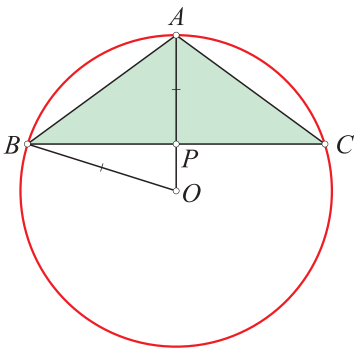
Izvod duljine $|BO|$ je jednak i u slučaju tupokutnog trokuta (slika 5) te na kraju dobivamo

$$|PO| = |BO| - |AP| = \frac{a^2 - 2b^2}{4v}.$$

Ako je trokut pravokutan, točka O se podudara s P i vrijedi $a^2 = 2b^2$ te konačno zaključujemo da u sva tri slučaja imamo

$$|PO| = \frac{|2b^2 - a^2|}{4v}.$$

U nastavku računamo udaljenost Gergonneove točke od stranice $\overline{BC}$. Neka su točke M i K



Slika 5.

dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom (slika 6). Prvo imamo $|MB| = |BP| = \frac{a}{2}$, odnosno $|AM| = b - \frac{a}{2}$. Neka je D nožište okomice iz M na stranicu $\overline{BC}$. Iz sličnosti trokuta MBD i ABP dobivamo

$$\frac{|MD|}{|MB|} = \frac{|AP|}{|AB|}$$

pa je

$$|MD| = \frac{av}{2b}.$$

Imamo i

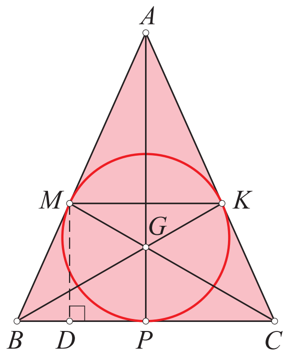
$$\frac{|BD|}{|BM|} = \frac{|BP|}{|AB|}$$

iz čega dobivamo

$$|BD| = \frac{a^2}{4b}$$

te je

$$|CD| = |BC| - |BD| = \frac{a(4b - a)}{4b}.$$



Slika 6.

Iz sličnosti trokuta MDC i GPC slijedi

$$\frac{|GP|}{|PC|} = \frac{|MD|}{|DC|}$$

te je konačno

$$|PG| = \frac{av}{4b - a}.$$

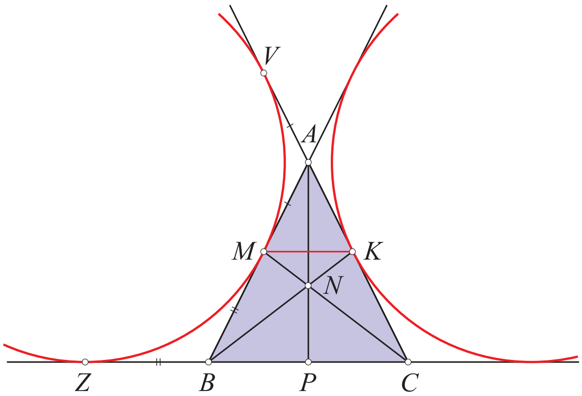
Prethodni postupak možemo iskoristiti i za računanje duljine $|PN|$. Označimo ovaj put sa M i K dirališta pripisanih kružnica na stranicama $\overline{AB}$

i $\overline{AC}$ (slika 7). Neka su V i Z dirališta pripisane kružnice trokuta ABC koja dodiruje stranicu $\overline{AB}$ s produžetcima stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}|AC| + |AV| &= |BC| + |BZ|,\\ |AV| + |BZ| &= |AM| + |BM| = b\end{aligned}$$

iz čega dobivamo $|AM| = |AV| = \frac{a}{2}$, $|BM| = |BZ| = b - \frac{a}{2}$. Sada posve analogno kao i u slučaju Gergonneove točke dolazimo do

$$|PN| = \frac{v(2b-a)}{2b+a}.$$



Slika 7.

U nastavku računamo neke od razlika prethodno dobivenih udaljenosti na temelju kojih ćemo moći zaključivati o poretku tih točaka na simetrali s. Prvo imamo

$$|PG| - |PH| = \frac{ab(b-a)}{v(4b-a)} \qquad (3)$$

$$|PU| - |PG| = \frac{2av(b-a)}{(a+2b)(4b-a)} \qquad (4)$$

$$|PT| - |PU| = \frac{2v(b-a)}{3(a+2b)} \qquad (5)$$

$$|PT| - |PN| = -\frac{4v(b-a)}{3(2b+a)}. \qquad (6)$$

Nadalje, ako je trokut ABC šiljastokutan, vrijedi i

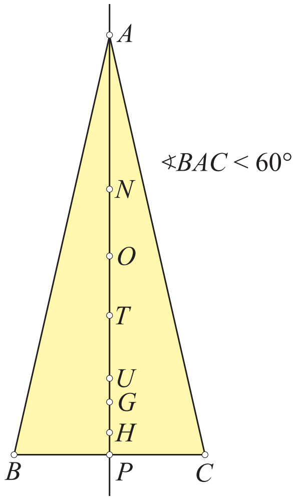
$$|PO| - |PT| = \frac{(b-a)(b+a)}{6v} \qquad (7)$$

$$|PN| - |PO| = \frac{(b-a)^2}{2v}. \qquad (8)$$

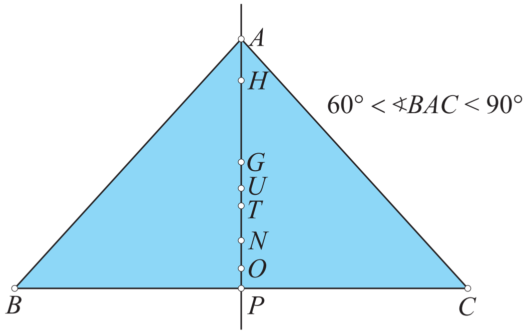
Primijenimo li nejednakost trokuta na stranice trokuta ABC, dobivamo nejednakost $2b > a$ pa je $4b - a > 0$, odnosno iz (3) slijedi da je $|PG| > |PH|$ ako i samo ako je $b > a$. Drugim riječima, udaljenost točaka P i G je veća od udaljenosti točaka P i H ako i samo ako je $\sphericalangle BAC < 60°$. Analogno, koristeći se jednakostima (4) i (5) zaključujemo da je $|PU| > |PG|$ ako i samo ako je $\sphericalangle BAC < 60°$ te da je $|PT| > |PU|$ ako i samo ako je $\sphericalangle BAC < 60°$. Ako je trokut ABC šiljastokutan i nije jednakostraničan, prema jednakosti (8) je $|PN| > |PO|$. Konačno, iz jednakosti (6) i (7) imamo da je u trokutima s kutom $\sphericalangle BAC < 60°$ točka O između točaka T i N, a u trokutima s kutom $\sphericalangle BAC > 60°$ točka N je između točaka T i O.

Iz prethodnih razmatranja konačno zaključujemo:

a) Ako je trokut ABC šiljastokutan i $\sphericalangle BAC < 60°$, poredak promatranih karakterističnih točaka je H, G, U, T, O, N pri čemu je točka H najbliža točki P. Pritom se sve točke nalaze unutar trokuta (slika 8).



Slika 8.



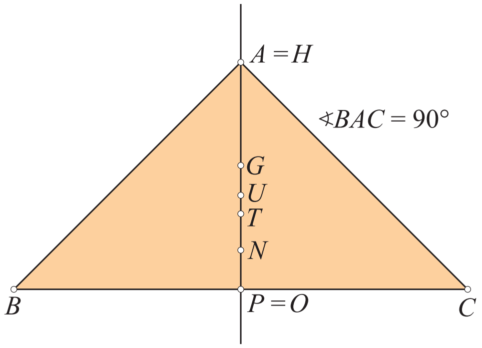
Slika 9.

b) Ako je trokut ABC jednakostraničan, sve točke se podudaraju.

c) Ako je trokut ABC šiljastokutan i $\sphericalangle BAC > 60°$, poredak točaka je O, N, T, U, G, H, pri čemu je O najbliža točki P i sve točke su unutar trokuta (slika 9).

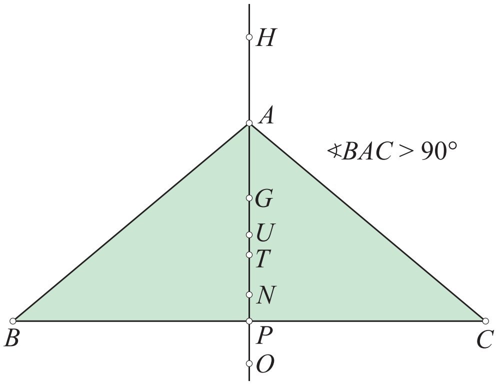
d) Ako je trokut ABC pravokutan, poredak točaka je jednak onom u prethodnom slučaju s tim da se O podudara sa P, dok se H podudara sa A (slika 10).

e) Ako je trokut ABC tupokutan, točke O i A se nalaze na suprotnim stranama stranice $\overline{BC}$. Ostale promatrane karakteristične točke se nalaze s iste strane kao i A, a poredak im je N, T, U, G, H, s tim da je N najbliža točki P, a H se nalazi



Slika 10.

izvan trokuta ABC (slika 11). Dakle, poredak točaka je jednak onima u prethodnim dvama slučajevima.



Slika 11.

Na kraju uočimo da poredak četiriju standardnih točaka, T, H, U i O, postaje obratan kad $\sphericalangle BAC < 60°$ prelazi u $\sphericalangle BAC > 60°$. Isto se zbiva i kad tom nizu točaka pridodamo Gergonneovu točku. To svojstvo uočavamo i za točke T, H, U, G i N. Ako promatramo svih šest zadanih točaka, primjećujemo da zbog međusobnog položaja točaka O i N, nemamo potpunu simetričnost poretka u odnosu na granični slučaj $\sphericalangle BAC = 60°$.

Primijetimo još i da ne postoje dvije promatrane karakteristične točke koje se podudaraju, osim ako trokut nije jednakostraničan. Neke tvrdnje o (ne)podudaranju karakterističnih točaka dokazane su i za općenite trokute u [1].

LITERATURA

1/ A. Bingula, M. Starčević (2015.): *Podudaranje karakterističnih točaka trokuta*, Matematika i škola, 74–78, 82.